

Proposition pour transformer les exercices 73, 74 et 75 p.157 du manuel Phare (5^{ème})

Avant de demander aux élèves de construire la figure, on pourrait leur proposer d'observer des pavages faisant apparaître des étoiles à huit branches et leur demander de proposer un programme de construction de celle-ci. En fonction des textes rédigés par les élèves, on pourrait être amené à donner une construction de l'étoile comme superposition de deux carrés. L'un des deux doit faire un huitième de tour sur l'autre autour de son centre. C'est l'occasion d'aborder une nouvelle transformation géométrique : la rotation.

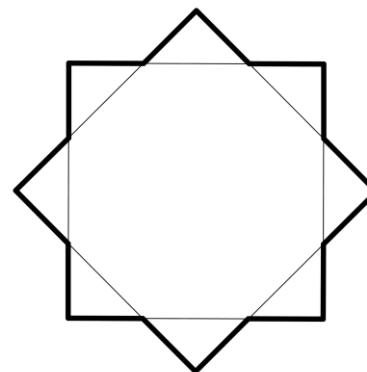
Voici un exemple qui peut être le point de départ d'une nouvelle observation dont le but sera la construction effective de l'étoile à huit branches.



Fontaine du patio du mausolée de Moulay Ismail à Meknès (XVIII^e siècle)

- 1) Observe l'étoile à huit branches ci-contre. Elle est composée de deux quadrilatères.
Quelle est la nature de ces quadrilatères ?

Où se situent les huit sommets ?



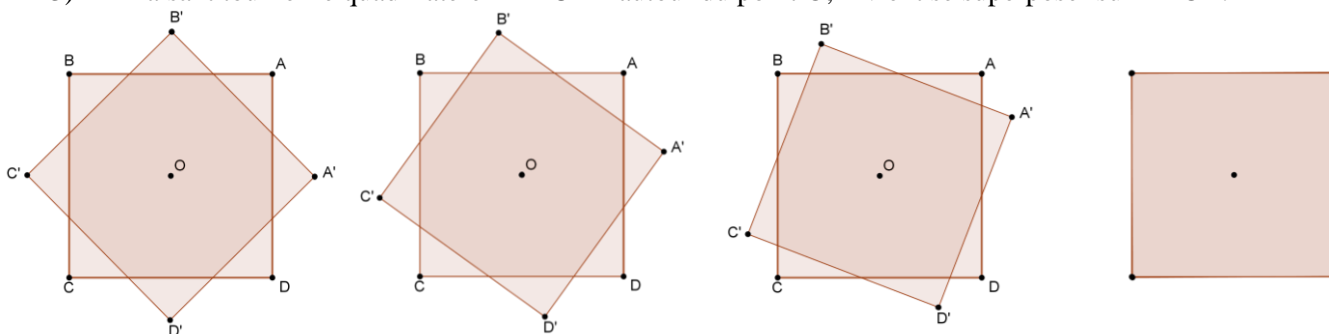
- 2) Propose un programme de construction d'une étoile à huit branches.

Aides possibles :

- Trace les diagonales des carrés ;
- Que peut-on dire des diagonales de ces deux carrés ?
- Que peut-on en déduire à propos des huit sommets ?

Une nouvelle transformation géométrique

- 3) En faisant tourner le quadrilatère A'B'C'D' autour du point O, il vient se superposer sur ABCD.



On dit que le quadrilatère A'B'C'D' est obtenu par une rotation du quadrilatère ABCD.

Pour définir une rotation, il faut un centre, un angle et un sens pour tourner (sens des aiguilles d'une montre/sens inverse).

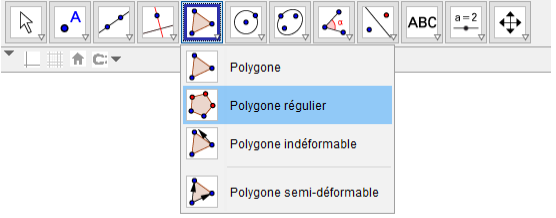
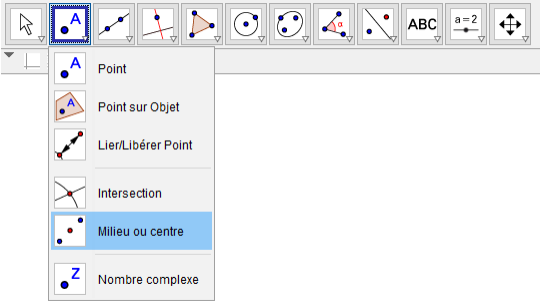
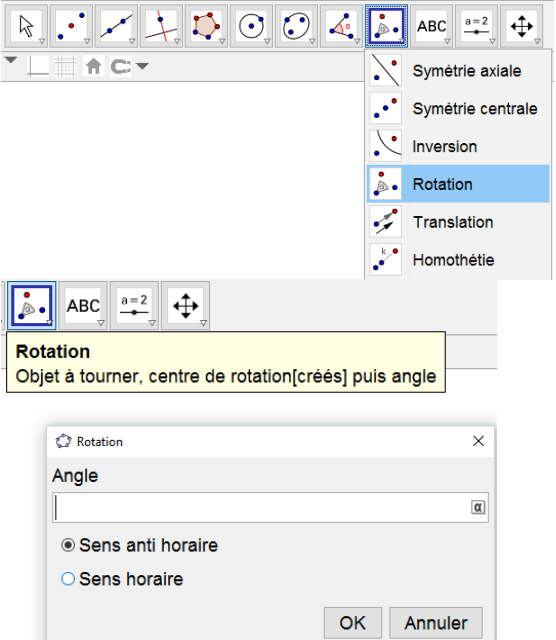
Complète :

Les points A', B', C', et D' sont respectivement les images des points ..., ..., ... et ... par la rotation de centre ..., d'angle et dans le sens

$OA' = \dots$; $OB' = \dots$; $OC' = \dots$; $OD' = \dots$

$A' \hat{=} A = B' \hat{=} B = C' \hat{=} C = D' \hat{=} D = \dots^\circ$

4) Construction avec GeoGebra :

<p>Construis un carré ABCD en utilisant l'outil "Polygone régulier".</p>	
<p>Construis O le centre de ce carré à l'aide de l'outil "Milieu ou centre".</p>	
<p>Construis A'B'C'D' image de ABCD par la rotation de centre O, d'angle _____ et dans le sens _____.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Sélectionne "Rotation". • Clique avec le bouton gauche de la souris, tout en maintenant la touche "Ctrl" enfoncée, sur les côtés du carré ABCD. • Clique sur le centre de la rotation (ici, le point O déjà créée). • Dans la fenêtre qui s'ouvrira, indique l'angle trouvé précédemment et choisis le sens de la rotation. 	

5) Coloriage :

- Trace les diagonales des deux carrés, puis cache tous les points de la figure.
- Imprime trois exemplaires de ton étoile à huit branches.
- Voici trois défis pour colorier tes étoiles :

1^{er} défi

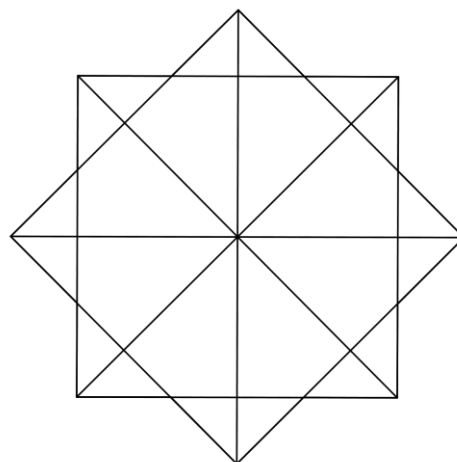
Colorie une étoile à huit branches de quatre couleurs différentes pour qu'elle possède un centre de symétrie et aucun axe de symétrie.

2^{ème} défi

Colorie une deuxième étoile, en utilisant le moins de couleurs possible, pour qu'elle possède un centre de symétrie et aucun axe de symétrie.

3^{ème} défi

Colorie la troisième étoile de façon à ce qu'elle possède quatre axes de symétrie en utilisant le plus de couleurs possible.



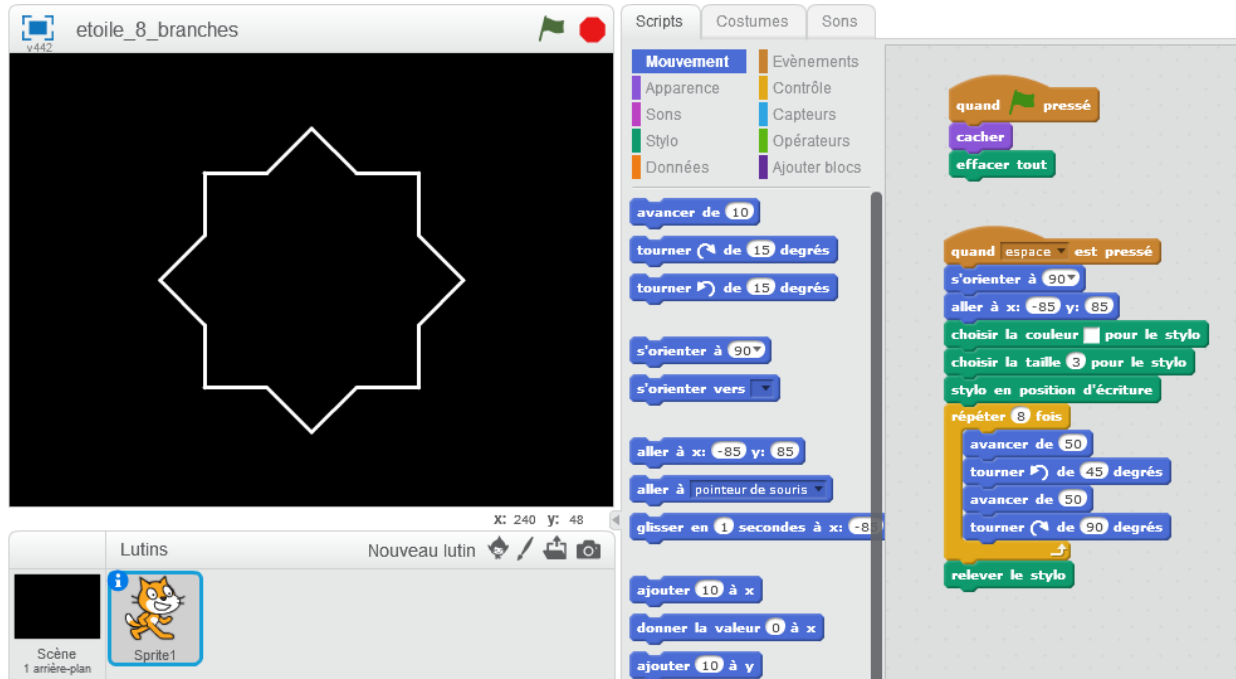
D'autres pistes possibles

A) Programmation avec Scratch

L'étoile à huit branches

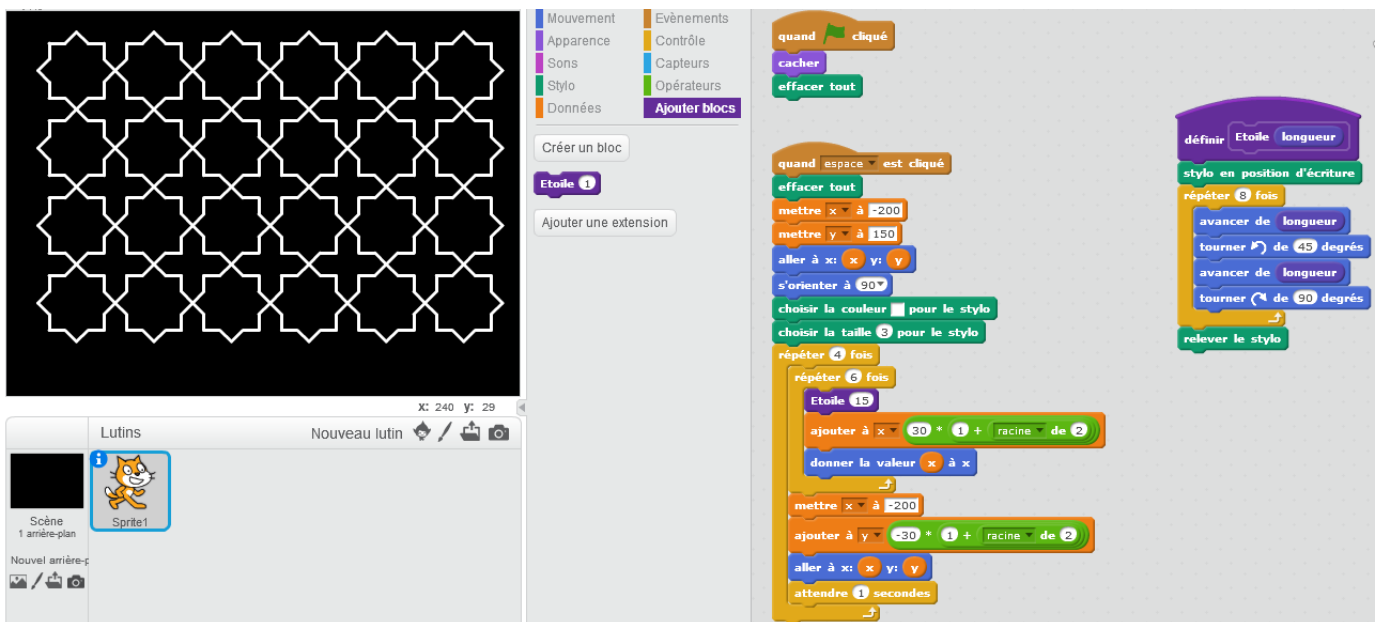
La construction d'une étoile à huit branches relève d'une procédure algorithmique, il peut être intéressant de demander aux élèves de rechercher un élément minimal permettant la construction de l'étoile en le répétant régulièrement par une même procédure.

Exemple : on trace deux côtés consécutifs formant un angle de 135° , puis on répète huit fois cette procédure en faisant tourner le lutin de Scratch de 90° .



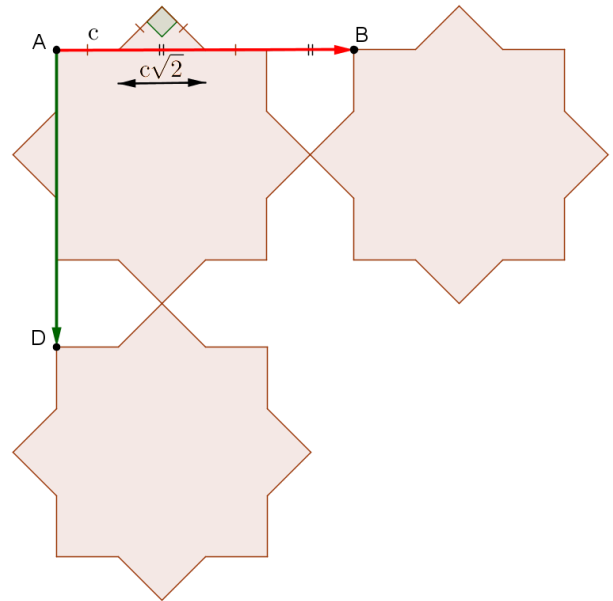
Pavage croix-étoile

L'un des pavages les plus rencontrés avec l'étoile à huit branches est le pavage croix-étoile ci-dessous :



Le motif de base de ce pavage est une étoile à huit branches que l'on reproduit à l'aide d'une translation horizontale et d'une translation verticale.

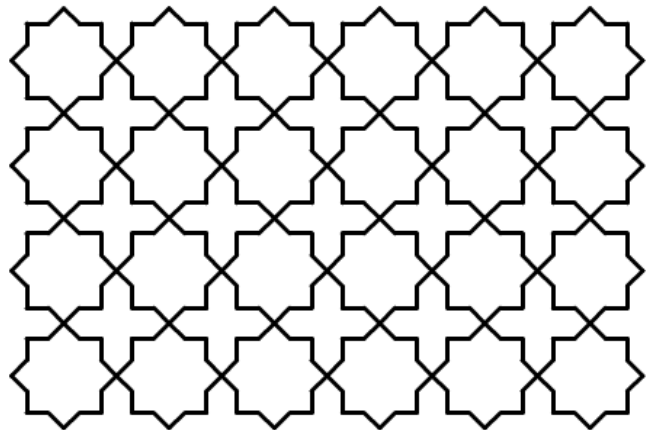
Les pointes de l'étoile sont formées de huit triangles rectangles et isocèles superposables, on peut donc utiliser le théorème de Pythagore pour déterminer la longueur de leur hypoténuse. Ainsi, les deux vecteurs de ces deux translations ont la même norme : $2c+2c\sqrt{2}$ où c est la longueur du côté de l'étoile.



Proposition d'exercice :

Partie 1 : Etude du pavage

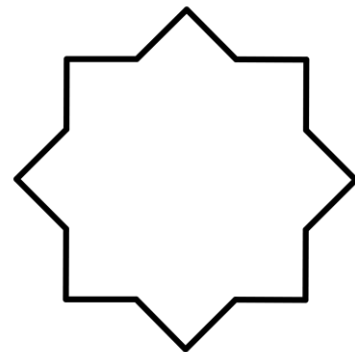
Retrouve le motif de base et les différentes transformations qui permettent le pavage ci-contre.



Partie 2 : Motif élémentaire

Deux côtés consécutifs d'une étoile à huit branches forment un motif élémentaire : on peut le reproduire plusieurs fois à l'aide d'une transformation pour obtenir l'étoile.

- 1) Repasse en rouge sur l'étoile ci-contre deux de ses côtés formant un motif élémentaire.
- 2) Décris la transformation qui permet de le reproduire afin d'obtenir une étoile.



Partie 3 : Programmation avec Scratch

- 1) L'étoile à huit branches

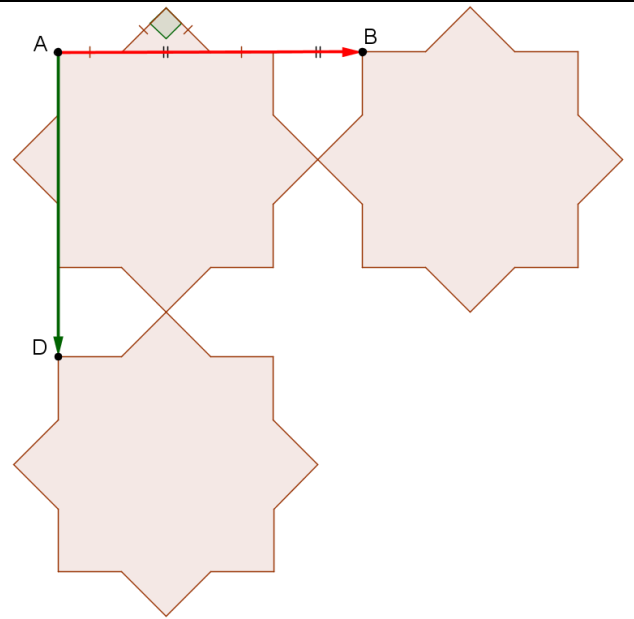
On se propose d'écrire un programme permettant au lutin du logiciel Scratch de construire ce pavage.

- a) Ecris une suite d'instructions permettant au lutin de dessiner le motif élémentaire trouvé dans la partie 2.
- b) Propose un script qui permet de dessiner une étoile à huit branches en utilisant la boucle "Répéter"

2) Le pavage croix-étoile

Pour réaliser le pavage croix-étoile, on utilise la translation qui transforme A en B et la translation qui transforme A en D.

- 1) Pour déplacer le lutin du point A au point B, il faut connaître la distance AB. calcule cette distance en expliquant la démarche suivie.



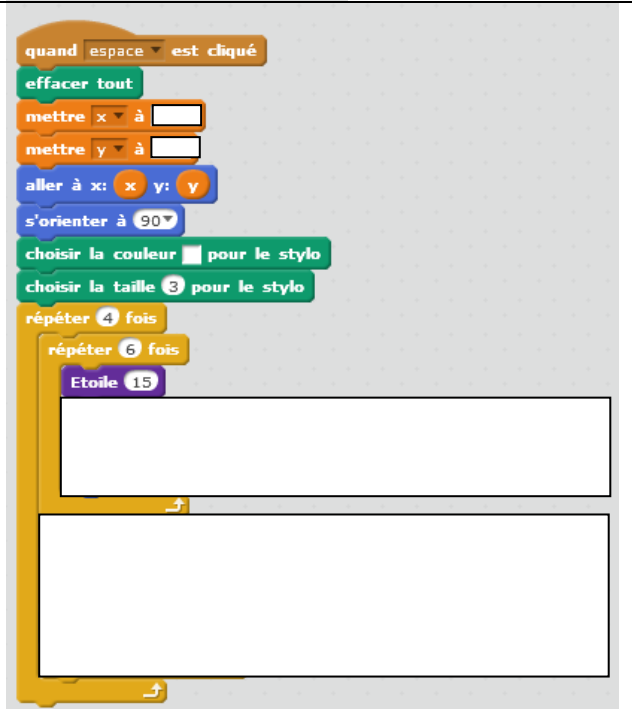
- 2) Complète le script ci-contre qui permet de dessiner une étoile dont le côté a pour longueur la valeur de la variable "longueur".



- 3) On choisit le point A(-200 ; 150) comme point de départ pour construire la première étoile : c'est son premier sommet.

Les variables x et y créées servent à positionner le lutin sur le premier sommet de chaque étoile.

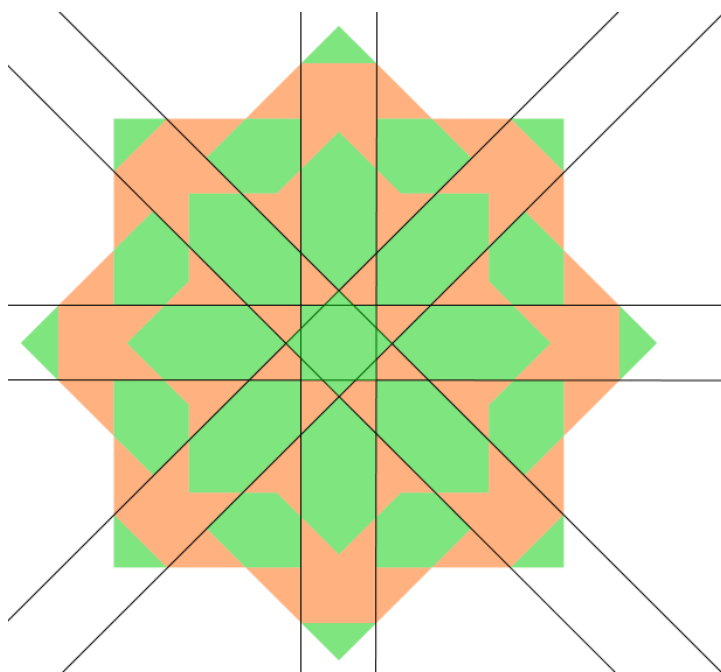
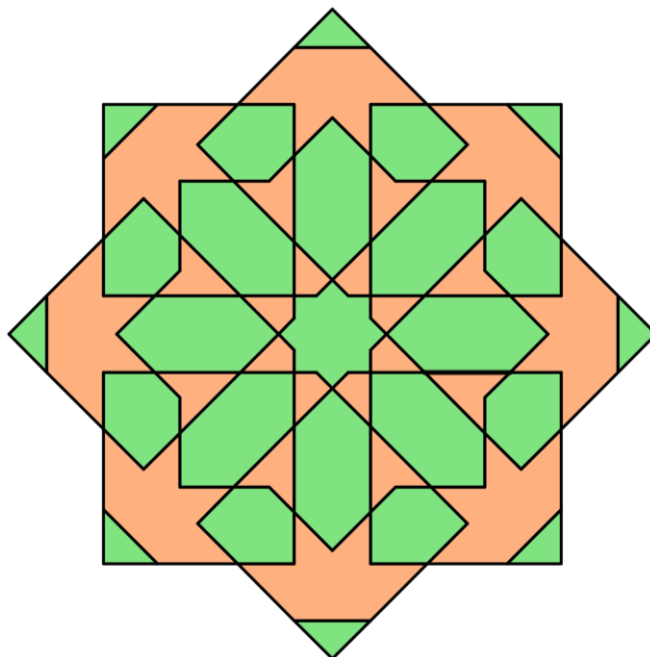
- a) Quelle doit-être la valeur initiale de x et de y ?
- b) Repère l'instruction permettant au lutin de se positionner en A.
- c) Quelles sont les coordonnées du lutin lorsqu'il est positionné en B ?
Que remarques-tu ?
- d) Quelles instructions doit-on ajouter après la ligne "Etoile(15)" pour que le lutin se déplace horizontalement jusqu'au premier sommet de l'étoile suivante ?
- e) Complète le programme puis teste-le en créant un nouveau projet Scratch.



B) Zellige et homothétie

La mosaïque ci-dessous est obtenue à partir de l'étoile à huit branches centrale à laquelle on a appliqué deux homothéties dont le centre est celui de l'étoile et les rapports respectifs sont 4 et 6. Le reste de la construction se fait en traçant les droites supports des côtés des carrés formant l'étoile centrale.

Voir [l'animation GeoGebra](#) pour les étapes de la construction.



Suivant

Réinitialiser

Voici les étapes permettant de construire un motif de Zellige :

On construit une étoile à huit branches.

On construit O le centre de cette étoile.

On construit l'image de cette étoile par l'homothétie de centre O et de rapport 4.

On construit une troisième étoile image de l'étoile centrale par l'homothétie de centre O et de rapport 6.

On trace les droites supports des côtés des carrés formant l'étoile centrale.

On repère les motifs de base de la mosaïque et on les colorie en alternant les couleurs.

On trouvera d'autres pistes pour utiliser l'étoile à huit branches en classe dans la brochure "Des mathématiques dans de bien belles choses " de la régionale Lorraine de l'A.P.M.E.P.

On peut aussi réaliser ce zellige à l' aide du logiciel Scratch en remarquant que le motif est composé de deux étoiles dont une est un agrandissement de l' autre à l' échelle 4 et de huit carrés qui tournent autour de l' étoile centrale :

The image displays the Scratch software interface. On the left, a stage titled 'zellige' shows a complex geometric pattern composed of green and yellow lines. The pattern consists of a central star-like shape surrounded by eight squares. The right side of the interface shows the code editor with the following blocks:

```

    quand espace est cliqué
    s'orienter à 90
    mettre angle à 0
    mettre cote_etoile à 10
    mettre cote_carre à cote_etoile * 2 + racine de 2
    aller à x: (-1 * cote_carre / 2) y: cote_carre / 2
    choisir la taille 3 pour le stylo
    Etoile cote_etoile
    répéter 3 fois
    s'orienter à angle
    Carre 2.5 * cote_carre
    avancer de cote_etoile
    tourner de 45 degrés
    avancer de cote_etoile
    ajouter à angle 45
    attendre 1 secondes
    mettre cote_carre à 4 * cote_carre
    aller à x: (-1 * cote_carre / 2) y: cote_carre / 2
    s'orienter à 90
    Etoile 4 * cote_etoile

    quand cliqué
    cacher
    effacer tout

    définir Etoile cote
    choisir la couleur pour le stylo
    stylo en position d'écriture
    répéter 8 fois
    avancer de cote
    tourner de 45 degrés
    avancer de cote
    tourner de 90 degrés
    relever le stylo

    définir Carre cote
    choisir la couleur pour le stylo
    stylo en position d'écriture
    répéter 4 fois
    avancer de cote
    tourner de 90 degrés
    relever le stylo
  
```