Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

ministère éducation nationale

Secrétariat Général

Direction générale des ressources humaines

Sous-direction du recrutement

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Concours du second degré — Rapport de jury

Session 2009

CAPES EXTERNE DE MATHÉMATIQUES

Rapport de jury présenté par M. Mohamed KRIR
Président de jury

Les rapports des jurys sont établis sous la responsabilité des présidents de jury

CONSEILS PRATIQUES AUX FUTURS CANDIDATS

Il est recommandé aux futurs candidats de s'informer à l'avance sur les modalités des concours de recrutement en général et sur celles particulières au CAPES externe et au CAFEP-CAPES de mathématiques.

Les renseignements généraux (les conditions d'accès ; la préparation ; le déroulement du concours ; la carrière dans l'enseignement secondaire) se trouvent sur le site du Ministère

http://education.gouv.fr

rubrique SIAC2.

Les informations spécifiques (programmes ; nature des épreuves) sont publiées dans le bulletin officiel de l'éducation nationale, publication qui informe les enseignants : carrière, programmes, nominations, vacances de postes, concours, etc. Ces renseignements se trouvent également, pour l'essentiel, dans le rapport du concours.

Le jury, pour faciliter la recherche d'information émanant des candidats et des formateurs, a en outre créé un site à l'adresse :

http://capes-math.org

sur lequel il a réuni l'essentiel des informations utiles à la préparation au concours.

ATTENTION : Les informations figurant sur ce site n'ont pas de caractère officiel ; seules les informations délivrées directement par la DGRH et par le Ministère ont valeur officielle.

« LES RAPPORTS DES JURYS DES CONCOURS SONT ÉTABLIS SOUS LA RESPONSABILITÉ DES PRÉSIDENTS DE JURY »

Table des matières

1 PRÉSENTATION DU CONCOURS 2009

1.1 Composition du jury.

Par arrêté en date du 9 février 2009, la composition du jury est la suivante :

M.	KRIR	Mohamed	Maître de Conférences, Président	Versailles
M.	AGUER	Bernard	IA-IPR, Secrétaire général	Amiens
M.	ANDRIEUX	Jean-Claude	Professeur Agrégé, Vice-président	Dijon
Mme	FLEURY-BARKA	Odile	Maître de Conférences, Vice-présidente	Reims
M.	MORENO-SOCIAS	Guillaume	Maître de Conférences, Vice-président	Versailles
M.	SORBE	Xavier	IGEN, Vice-président	Paris
Mme	ABADIE	Marie-Luce	Professeur Agrégé	Bordeaux
M.	AMMAR KHODJA	Farid	Maître de conférences	Besançon
Mme	ANDRÉ	Stéphanie	Professeur Agrégé	Orléans-Tours
M.	ARTIGUES	Christian	IA-IPR	Bordeaux
M.	ARTIGUES	Jean-Paul	Professeur de Chaire Supérieure	Rouen
Mme	AUDOUIN	Marie-Claude	IA-IPR	Versailles
M.	BAJI	Bruno	Professeur Agrégé	Limoges
Mme	BANTEGNIES	Florence	Professeur de Chaire Supérieure	Paris
Mme	BARACHET	Françoise	IA-IPR	Clermont-Ferrand
M.	BARBE	Jacques	Professeur Agrégé	Nantes
M.	BARLIER	Philippe	Professeur Agrégé	Nantes
Mme	BARRIÉ	Mireille	Professeur Agrégé	Versailles
M.	BELLY	Daniel	Professeur Agrégé	Nice
M.	BERNARD	Frédéric	Professeur Agrégé	Montpellier
M.	BILAND	Erwan	Professeur Agrégé	Paris
M.	BILLAULT	Éric	Professeur Agrégé	Rennes
Mme	BLOND	Élisabeth	Professeur Agrégé	Versailles
Mme	BOISSONNET	Émilia	Professeur Agrégé	Paris
M.	BOULMEZAOUD	Tahar Zamène	Maître de conférences	Versailles
M.	BOURGES	William	Professeur Agrégé	Aix-Marseille
M.	BOURHRARA	Mostafa	Professeur Agrégé	Poitiers
Mme	BOUTON-DROUHIN	Catherine	Professeur de Chaire Supérieure	Versailles
Mme	BOZON	Marie-Pierre	Professeur Agrégé	Montpellier
M.	BRANDEBOURG	Patrick	IA-IPR	Aix-Marseille
M.	BRAUNER	Joël	Professeur de Chaire Supérieure	Nancy-Metz
M.	BRETONNIÈRE	Laurent	Professeur Agrégé	Caen
M.	CAPY	François	IA-IPR	Rouen
M.	COMPOINT	Élie	Maître de conférences	Lille

Mme	CORTEZ	Aurélie	Maître de conférences	Versailles
M.	COUCHOURON	Jean-François	Maître de conférences	Nancy-Metz
Mme	COURBON	Denise	IA-IPR	Lyon
M.	COURILLEAU	Patrick	Maître de conférences	Versailles
M.	DAMAMME	Gilles	Maître de conférences	Caen
Mme	DARRACQ-CALMETTES	Marie-Cécile	Professeur Agrégé	Grenoble
M.	DE BIÈVRE	Stéphan	Professeur des Universités	Lille
M.	DE SAINT JULIEN	Arnaud	Professeur Agrégé	Montpellier
Mme	DEAT	Joëlle	IA-IPR	Versailles
M.	DESCHAMPS	Bruno	Professeur des Universités	Nantes
M.	DESROUSSEAUX	Pierre-Antoine	Professeur Agrégé	Montpellier
Mme	DESSAIGNE	Aurélie	Professeur Agrégé	Versailles
M.	DIGER	Alain	IA-IPR	Orléans-Tours
M.	DOMBRY	Clément	Maître de conférences	Poitiers
M.	DUBOULOZ	Georges	Professeur Agrégé	Grenoble
Mme	DUCOURTIOUX	Catherine	Maître de conférences	Corse
Mme	ERNOULT	Monique	Professeur Agrégé	Créteil
M.	ESCOFFIER	Jérôme	Professeur Agrégé	Aix-Marseille
Mme	ÉVRARD	Sabine	Professeur Agrégé	Amiens
M.	FAURE	Christian	IA-IPR	Montpellier
M.	FAURE	Ludovic	Professeur Agrégé	Bordeaux
M.	GARCIA	Gilles	Professeur Agrégé	Paris
M.	GEWIRTZ	Alexander	Professeur Agrégé	Amiens
M.	GLIÈRE	André-Jean	Professeur Agrégé	Nantes
M.	GOSSE	Michel	IA-IPR	Lille
M.	GRAS	Hervé	Professeur Agrégé	Créteil
M.	HARLÉ	Jean	Professeur de Chaire Supérieure	Amiens
M.	HASSAN	Azzam	Professeur Agrégé	Grenoble
M.	HONVAULT	Pascal	Maître de conférences	Lille
M.	HUBERT	Nicolas	Professeur Agrégé	Versailles
Mme	HUG	Patricia	Professeur Agrégé	Versailles
Mme	HUMBERT	Martine	Professeur Agrégé	Nancy-Metz
M.	JAMET	Pierre-Yves	Professeur de Chaire Supérieure	Aix-Marseille
Mme	JAUFFRET	Brigitte	IA-IPR	Aix-Marseille
Mme	JOINT	Marie-Emmanuelle	Professeur Agrégé	Rennes
Mme	KHERIEF	Khamsa	Professeur Agrégé	Paris
Mme	KOWALSKA-CHASSAING	Anna	Professeur Agrégé	Nancy-Metz
M.	LAAMRI	El-Haj	Maître de conférences	Nancy-Metz
Mme	LACRESSE	Christelle	Professeur Agrégé	Nancy-Metz
M.	LAGRAIS	Alain	Professeur Agrégé	Nantes
Mme	LANÉRY	Hélène	Professeur Agrégé	Amiens
Mme	LANGLOIS	Catherine	Professeur Agrégé	Lyon
M.	LAOUES	Mourad	Professeur Agrégé	Dijon

M.	LASSALLE	Olivier	IA-IPR	Créteil
Mlle	LAURENT	Céline	Professeur Agrégé	Versailles
M.	LAZAR	Boris	IA-IPR	Rennes
M.	LE FLOCH	Laurent	Maître de conférences	Poitiers
M.	LEBRUN	Guillaume	Professeur Agrégé	Nantes
Mme	LÉCUREUX-TÊTU	Marie-Hélène	Professeur Agrégé	Toulouse
M.	LEFEUVRE	Yann	Professeur Agrégé	Amiens
M.	LEGRY	Ludovic	IA-IPR	Amiens
M.	LEMPEREUR DE GUERNY	Robert	Professeur Agrégé	Versailles
M.	LETORT	Pierre-Yves	Professeur Agrégé	Bordeaux
Mme	LOUVRIER	Pascale	Professeur Agrégé	Caen
M.	LUCAS	Édouard	Professeur Agrégé	Paris
Mme	MALLÉGOL	Pascale	Professeur Agrégé	Nancy-Metz
Mme	MALLET	Nathalie	Professeur Agrégé	Poitiers
M.	MARINO	Alexandre	Professeur Agrégé	Nice
Mme	MAROTTE	Fabienne	Maître de conférences	Poitiers
M.	MARTEAU	Jean-Luc	IA-IPR	Lyon
M.	MASSELIN	Vincent	Professeur Agrégé	Rouen
M.	MAUGER	David	Maître de conférences	Paris
Mme	MÉDARD	Natacha	Professeur Agrégé	Grenoble
M.	MERCKHOFFER	René	IA-IPR	Versailles
M.	MICHALAK	Pierre	IA-IPR	Versailles
Mme	MICHAU	Nadine	Professeur Agrégé	Versailles
Mme	MUNCK	Françoise	IA-IPR	Nantes
M.	NADIR	Hachemi	Professeur Agrégé	Nantes
M.	NEVADO	Alain	IA-IPR	Nantes
Mme	NIKOLSKAIA	Ludmila	Professeur Agrégé	Bordeaux
M.	NIN	Gérard	Maître de conférences	Aix-Marseille
M.	PAGOTTO	Éric	IA-IPR	Caen
M.	PAYET	Willy	Professeur Agrégé	La Réunion
M.	PETIT	Francis	IA-IPR	Grenoble
Mme	POLLAK	Yolaine	Professeur Agrégé	Versailles
M.	POMAGEOT	Loïc	Professeur Agrégé	Amiens
M.	RENIER	Guillaume	Professeur Agrégé	Versailles
M.	ROBLET	Emmanuel	Professeur de Chaire Supérieure	Paris
M.	ROLLAND	Hervé	Professeur Agrégé	Rennes
M.	ROMOLI	David	Professeur Agrégé	Nantes
Mme	ROUANET	Véronique	Professeur Agrégé	Créteil
Mme	ROUDNEFF	Évelyne	IA-IPR	Versailles
M.	ROUX	Hervé	Professeur Agrégé	Aix-Marseille
Mme	SABBAN	Chloé	Professeur Agrégé	Paris
Mme	SANZ	Monique	IA-IPR	Nantes
M.	SASSI	Taoufik	Professeur des Universités	Caen
M.	SCATTON	Philippe	IA-IPR	Reims
M.	SERRA	Éric	IA-IPR	Nice
M.	SOUVILLE	Jean	Maître de conférences	Poitiers

M.	SUEUR	Franck	Maître de conférences	Paris
Mme	SZWARCBAUM	Élia	Professeur Agrégé	Versailles
M.	TERRACHER	Pierre	Maître de conférences	Bordeaux
Mme	TERREAU	Corinne	Professeur Agrégé	Dijon
M.	TESTUD	Benoît	Maître de conférences	Amiens
M.	TOUPANCE	Pierre-Alain	Professeur Agrégé	Lyon
Mme	TRÉFOND	Marie-Christine	Professeur Agrégé	Amiens
M.	TRUCHAN	Alain	IA-IPR	Lyon
M.	VANROYEN	Jean-Philippe	Professeur Agrégé	Lille
M.	VINAVER	Georges	Professeur Agrégé	Versailles
M.	ZARRABI	Mohamed	Maître de conférences	Bordeaux

1.2 Programme du concours

Le texte en vigueur, paru au B.O. n° 8 spécial du 24 mai 2001, a été modifié par le B.O. n° 5 spécial du 20 mai 2004. Les modifications, mineures, visaient essentiellement à mettre en cohérence le programme avec les évolutions des programmes des classes de lycée. Le texte ci-dessous tient compte de ces modifications.

ÉPREUVES ÉCRITES

Le programme est formé des titres A et B de l'annexe I.

ÉPREUVES ORALES D'ÉXPOSÉ

Le programme est formé du titre A augmenté des paragraphes suivants du titre B de l'annexe I :
1.II. « Ensembles, relations, applications. »
2.I.3. « Structures des ensembles de nombres. »
2.III.5. « Calcul matriciel », alinéa b).
2.IV.2. « Géométrie vectorielle », alinéa e).
2.V.2. « Configurations. »
2.V.3. « Transformations. »
2.V.4. « Emploi des nombres complexes en géométrie », alinéas a), c) et d).
3.I.1. « Suites de nombres réels et de nombres complexes », alinéas a), b), d), e).
3.I.2. « Fonctions d'une variable réelle. »
3.II.2. « Dérivation », dans le cas des fonctions à valeurs réelles ou complexes.
3.II.3. « Intégration sur un intervalle compact », dans ce même cas.
3.II.4. « Étude locale de fonctions. »
3.IV.2. « Équations linéaires scalaires », alinéa b).
3.VI.1. « Courbes et surfaces », alinéa a).
4.2. « Variables aléatoires », alinéas a) et c).

ÉPREUVES ORALES SUR DOSSIER

Le programme est formé du titre A de l'annexe I.

UTILISATION DES CALCULATRICES

Circulaire du 16 Novembre 1999 n° 99-186 parue au BOÉN n° 42 du 25 novembre 1999.

ANNEXE I

A. Programmes de l'enseignement secondaire

1. La réunion des programmes de mathématiques des collèges et des lycées d'enseignement général et technologique en vigueur au 1^er^ janvier de l'année du concours et de ceux en vigueur au 1^er^ janvier de l'année précédente.
2. L'utilisation des calculatrices électroniques est défini par les arrêtés du 15 mai 1997 complétés par la circulaire n° 99-018 du 01-02-1999 parue au BOÉN n° 6 du 11-02-1999 ainsi que la circulaire du 16-11-1999.

Dans ce cadre, les candidats doivent se munir d'une calculatrice scientifique programmable, alphanumérique ou non, et graphique. Ils doivent savoir utiliser leur calculatrice dans les situations

numériques et algorithmiques liées au programme. Cet emploi combine les capacités suivantes, qui constituent un savoir-faire de base et sont seules exigibles :
– Savoir programmer une instruction d'affectation.
– Savoir effectuer les opérations arithmétiques sur les nombres et savoir comparer des nombres.
– Savoir utiliser les touches des fonctions qui figurent au programme et savoir programmer le calcul des valeurs d'une fonction d'une ou plusieurs variables permis par ces touches.
– Savoir programmer une instruction séquentielle, alternative ou itérative.
– Savoir afficher à l'écran la courbe représentative d'une fonction.
Ils doivent en outre munir leur calculatrice de programmes permettant :
– la recherche de solutions approchées d'une équation numérique à une variable ;
– le calcul de valeurs approchées d'une intégrale.

B. Programme complémentaire

Comme il est indiqué dans les instructions, les problèmes et les méthodes numériques et les aspects algorithmiques et informatiques (construction et mise en forme d'algorithmes, comparaison de leur performance, rédaction méthodique de programmes) sont largement exploités. Dans le texte du programme, ils sont représentés par le signe §.

1. NOTIONS SUR LA LOGIQUE ET LES ENSEMBLES

Aucun exposé de logique formelle n'est envisagé.

I. Généralités sur le langage et le raisonnement mathématiques. Éléments de logique.

Occurrences libres (ou parlantes) et occurrences liées (ou muettes) d'une variable dans une expression mathématique ; signes mutificateurs usuels ($\int \cdots \mathrm{d} \ldots$, $\sum$, $\mapsto$, $\{\cdots \mid \cdots\}$; $\forall$, $\exists$; etc.) ; mutifications implicites.

Calcul propositionnel : connecteurs logiques ; tables de vérité ; tautologies.

Utilisation des connecteurs et des quantificateurs dans le discours mathématique ; lien entre connecteurs logiques et opérations ou relations ensemblistes.

Pratique du raisonnement mathématique : hypothèses, conclusions, quelques figures usuelles du raisonnement (raisonnement par contraposition, par disjonction de cas, par l'absurde, utilisation d'exemples ou de contre-exemples, etc.) ; pour les énoncés sous forme d'implication, distinction entre condition nécessaire et condition suffisante, entre proposition directe et proposition réciproque ; cas particuliers de la recherche de lieux géométriques, d'ensembles de solutions d'équations.

II. Ensembles, relations, applications.

Opérations ensemblistes usuelles ; produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles. Relations et applications ; lois de composition internes ou externes.

Ensemble des parties d'un ensemble ; image directe ou image réciproque d'une partie par une application ; comportement des opérations d'image directe et d'image réciproque vis-à-vis des opérations ensemblistes.

Familles d'ensembles ; réunions et intersections « infinies ».

Relations d'ordre ; majorants, borne supérieure ...
Ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. Raisonnement par récurrence.

Relations d'équivalence ; classes d'équivalence, partition associée, ensemble quotient, compatibilité d'une loi de composition avec une relation d'équivalence (passage au quotient).

Construction de $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Q}$.

III. Rudiments de cardinalité.

Équipotence de deux ensembles ; classe des ensembles équipotents à un ensemble donné ; notion de cardinal.

Théorème de Cantor (« aucun ensemble n'est équipotent à l'ensemble de ses parties »).

Fonction caractéristique d'une partie d'un ensemble ; équipotence entre l'ensemble des parties d'un ensemble E et l'ensemble des applications de E dans $\{0, 1\}$.

Ensembles finis et infinis.

Ensembles dénombrables : exemples usuels ($\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, l'ensemble des suites finies d'entiers, l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes à coefficients rationnels, l'ensemble des nombres algébriques, etc.).

Puissance du continu (cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ou de $\mathbb{R}$) ; non dénombrabilité de $\mathbb{R}$.

2. ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

I. Nombres et structures

1. Groupes

a) Groupes, morphismes de groupes. Sous-groupes, sous-groupe engendré par une partie. Groupes cycliques. Ordre d'un élément ; théorème de Lagrange. Image et noyau d'un morphisme de groupes. Sous-groupes distingués, groupe quotient. Groupe opérant sur un ensemble, orbites. Éléments conjugués.

§ b) Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Cycles ; transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de cycles disjoints, en produit de transpositions. Signature d'une permutation, groupe alterné.

2. Anneaux et corps

Anneaux (unitaires), morphismes d'anneaux. Sous-anneaux.
Anneaux commutatifs, anneaux intègres ; idéaux, idéaux principaux ; anneaux quotients. Corps (commutatifs), sous-corps ; caractéristique d'un corps.

3. Structure des ensembles de nombres

a) Anneau $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs (ou rationnels). L'anneau $\mathbb{Z}$ est intègre ; divisibilité dans $\mathbb{Z}$. Division euclidienne ; sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$

Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont principaux ; théorème de Bézout.

§ b) Nombres premiers ; décomposition en facteurs premiers.

PGCD, PPCM ; algorithme d'Euclide.

c) Congruences ; anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, caractérisation des éléments inversibles.

d) Corps des rationnels, corps des réels, corps des complexes.

Il. Polynômes et fractions rationnelles

Dans ce chapitre, K désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$.

1. Polynômes à une indéterminée

§ a) Algèbre $K[X]$; degré d'un polynôme, terme dominant, polynôme unitaire.

L'anneau $K[X]$ est intègre ; divisibilité dans $K[X]$. Division euclidienne.

Les idéaux de $K[X]$ sont principaux ; théorème de Bézout.

Polynômes irréductibles ; décomposition en facteurs irréductibles.

PGCD, PPCM ; algorithme d'Euclide.

b) Fonctions polynômes

Racines (ou zéros) d'un polynôme, ordre de multiplicité. Polynômes scindés.

Correspondance entre polynômes et fonctions polynômes.

Équations algébriques. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé.

c) Dérivation des polynômes ; formule de Taylor.

d) Théorème de d'Alembert ; polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$. Factorisation des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Fractions rationnelles à une indéterminée

a) Corps $K(X)$; forme irréductible d'une fraction rationnelle non nulle.

b) Fonctions rationnelles : pôles, zéros ; ordre d'un pôle ou d'un zéro.

c) Décomposition en éléments simples. Cas du corps $\mathbb{C}$ et du corps $\mathbb{R}$.

d) Exemples simples de problèmes d'élimination.

III. Algèbre linéaire

Dans cette partie, K désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$

1. Espaces vectoriels

a) Espaces vectoriels. Applications linéaires, isomorphismes, endomorphismes, automorphismes. Formes linéaires. Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$, algèbre $\mathcal{L}(E)$, groupe linéaire $GL(E)$. Espace vectoriel produit d'une famille finie d'espaces vectoriels.

b) Sous-espaces vectoriels ; image et noyau d'une application linéaire. Sous-espace engendré par une partie. Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels, somme directe. Sous-espaces vectoriels supplémentaires, projecteurs.

c) Familles libres, familles génératrices, bases.

d) Étant donné une application linéaire u de E dans F et un supplémentaire E' de $\ker u$ dans E, u définit un isomorphisme de E' sur $\operatorname{im} u$.

2. Espaces vectoriels de dimension finie

a) Espaces admettant une famille génératrice finie. Théorème de la base incomplète, existence de bases ; dimension. Dimension d'un sous-espace, rang d'une famille de vecteurs. Existence de supplémentaires. Dimension d'une somme directe.

b) Rang d'une application linéaire ; formule du rang, caractérisation des isomorphismes.

c) Formes linéaires et hyperplans, équation d'un hyperplan.

d) Dualité. Bases associées d'un espace E et de son dual E^*. Orthogonal dans E^* d'une partie de E, orthogonal dans E d'une partie de E^* : dimension de l'orthogonal, double orthogonal.

3. Matrices

a) Espace vectoriel $M_{p,q}(K)$ des matrices à p lignes et q colonnes. Isomorphisme entre $\mathcal{L}(K^q, K^p)$ et $M_{p,q}(K)$. Produit matriciel, transposition. Algèbre $M_n(K)$; matrices inversibles, groupe linéaire $GL_n(K)$. Matrices symétriques, antisymétriques.

b) Matrice d'une application linéaire d'un espace vectoriel dans un autre, ces espaces étant munis de bases ; matrice d'un endomorphisme d'un espace vectoriel muni d'une base, matrice d'une famille finie de vecteurs relativement à une base. Matrice de passage (la matrice de passage de la base B à la base C est la matrice dont la j-ième colonne est formée des coordonnées dans B du j-ième vecteur de C). Effet d'un changement de base(s) sur la matrice d'une application linéaire.

c) Trace d'une matrice carrée, trace d'un endomorphisme.

d) Rang d'une matrice. Utilisation de matrices carrées extraites pour la détermination du rang. Matrices équivalentes. Caractérisation à l'aide du rang. Toute matrice M de rang r est équivalente à la matrice $I_r = (a_{ij})$, définie par les relations $a_{jj} = 1$ si $1 \leqslant j \leqslant r$, et $a_{ij} = 0$ dans tous les autres cas. Rang de la transposée d'une matrice.

e) Systèmes d'équations linéaires, rang. Conditions de compatibilité, systèmes de Cramer.

4. Applications multilinéaires, déterminants

a) Définition des applications multilinéaires, des applications symétriques, antisymétriques, alternées.

b) Formes n-linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n. Déterminant de n vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension n, critère d'indépendance.

c) Déterminant d'un endomorphisme, du composé de deux endomorphismes ; caractérisation des automorphismes.

d) Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant du produit de deux matrices, de la transposée d'une matrice. Mineurs, cofacteurs, développement par rapport à une ligne ou une colonne.

e) Applications des déterminants, expression de l'inverse d'une matrice carrée inversible, formules de Cramer ; orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

f) En relation avec la géométrie, application des déterminants à l'étude des systèmes linéaires de deux ou trois équations à deux ou trois inconnues.

5. Calcul matriciel

§ a) Exemples de calculs par blocs. Exemples d'emploi de normes matricielles. Conditionnement d'une matrice.

§ b) Opérations élémentaires sur les lignes (ou les colonnes) d'une matrice ; addition d'un multiple d'une ligne à une autre, multiplication d'une ligne par un scalaire non nul, échange de deux lignes. Applications à la résolution des systèmes linéaires, au calcul de déterminants, à l'inversion des matrices carrées et au calcul du rang.

Algorithme du pivot de Gauß ; pivot partiel, pivot total.

6. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Dans ce paragraphe, le corps de base est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Sous-espaces stables par un endomorphisme. Si u et v commutent, $\operatorname{im} u$ et $\ker u$ sont stables par v. Polynômes d'un endomorphisme ; théorème de décomposition des noyaux : si P et Q sont premiers entre eux, $\ker PQ(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$.

b) Valeurs propres d'un endomorphisme, sous-espaces propres, vecteurs propres.

c) Réduction d'un endomorphisme en dimension finie.

Polynôme annulant un endomorphisme ; lien avec le spectre.

Polynôme caractéristique, ordre de multiplicité d'une valeur propre. Théorème de Cayley–Hamilton.

Endomorphismes diagonalisables ; l'espace est somme directe des sous-espaces propres. Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé et a toutes ses racines simples est diagonalisable. Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il annule un polynôme scindé dont toutes les racines sont simples.

Sous-espaces caractéristiques. Tout endomorphisme u dont le polynôme caractéristique est scindé peut être trigonalisé : l'espace est somme directe des sous-espaces caractéristiques F_j et il existe une base de chaque F_j telle que la matrice dans cette base de l'endomorphisme induit par u soit triangulaire supérieure ; en outre, la dimension de F_j est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_j. Un tel endomorphisme u s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $u = d + n$, où d est diagonalisable, n est nilpotent, et $nd = dn$.

§ d) Valeurs propres d'une matrice carrée, vecteurs (colonnes) propres. Matrices semblables. Diagonalisation, trigonalisation des matrices carrées. Exemples d'emploi de décomposition en blocs (produits, matrices diagonales par blocs, triangulaires par blocs).

IV. Espaces euclidiens, espaces hermitiens

(Cf. analyse 3.I.6 espaces préhilbertiens réels ou complexes.)

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.

1. Espaces euclidiens

a) Isomorphisme canonique avec le dual.

Sommes directes orthogonales. Dimension de l'orthogonal d'un sous-espace, normale à un hyperplan. Projecteurs et symétries orthogonales.

b) Adjoint d'un endomorphisme ; matrice associée dans une base orthonormale.

Endomorphismes symétriques, antisymétriques.

c) Automorphismes orthogonaux. Groupe orthogonal $O(E)$, groupe des rotations (ou spécial orthogonal) $SO(E)$. Matrices orthogonales. Groupes $O(n)$ et $SO(n)$. Matrice associée à un automorphisme orthogonal dans une base orthonormale.

Changements de base orthonormale.

d) Déterminant de n vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n.

2. Géométrie vectorielle euclidienne

a) Les réflexions engendrent le groupe orthogonal $O(E)$.

b) Dans le plan euclidien orienté ($n = 2$) : matrice d'une rotation ; angle d'une rotation. Morphisme canonique de $\mathbb{R}$ sur $SO(2)$.

Classification des automorphismes orthogonaux à partir du sous-espace des points invariants.

c) Dans l'espace euclidien orienté ($n = 3$) :

Axe et angle d'une rotation. Les demi-tours engendrent $SO(3)$.

Classification des automorphismes orthogonaux à partir du sous-espace des points invariants.

d) En dimension 2 ou 3 : groupe des similitudes ; similitudes directes. Rapport d'une similitude, automorphisme orthogonal associé.

e) Produit vectoriel en dimension 3 ; expression dans une base orthonormale directe.

3. Espaces hermitiens

a) Sommes directes orthogonales. Projecteurs orthogonaux.

b) Adjoint d'un endomorphisme ; matrice associée dans une base orthonormale.

Endomorphismes hermitiens, matrices hermitiennes.

c) Automorphismes unitaires. Groupe unitaire $U(E)$. Groupe $U(n)$ des matrices unitaires d'ordre n.

4. Calcul matriciel et normes euclidiennes

§ a) Calcul de la projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace et de la distance d'un point à un sous-espace. Application aux problèmes de moindres carrés ; minimisation de $\|AX - B\|^2$, où $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et rang $A = p$.

§ b) Décomposition d'un élément M de $GL_n(\mathbb{R})$ sous la forme $M = QR$, où Q est orthogonale et R est triangulaire supérieure, par la méthode de Householder.

5. Réduction des endomorphismes symétriques et des endomorphismes hermitiens

§ a) Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique (resp. hermitien) dans une base orthonormale.

Diagonalisation d'une matrice symétrique (resp. hermitienne) au moyen d'une matrice orthogonale (resp. unitaire).

La plus grande valeur propre d'une matrice symétrique A est égale à $\sup_{X \neq 0} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX}$

b) Formes bilinéaires symétriques sur un espace euclidien, formes quadratiques, polarisation. Endomorphisme symétrique associé à une forme quadratique ; réduction dans une base orthonormale.

V. Géométrie affine et euclidienne

Dans ce chapitre, l'étude est placée dans le plan et l'espace.

1. Calcul barycentrique ; repérage

a) Sous-espaces affines ; direction d'un sous-espace affine.

b) Repères affines, coordonnées barycentriques.

c) Parties convexes.

d) Repères cartésiens, polaires, cylindriques et sphériques. Changement de repère orthonormal.

2. Configurations

a) Position relative de deux plans dans l'espace. Plans perpendiculaires. Plan médiateur d'un segment.

b) Cercles dans le plan. Puissance d'un point par rapport à un cercle. Ensemble des points M dont le rapport des distances à deux points A et B est constant, ou tels que l'angle de droites (ou de demi-droites) (MA, MB) soit constant.

c) Sphères. Intersection d'une sphère et d'un plan, de deux sphères.

d) Coniques. Définitions focales, bifocales ; tangente et normale en un point ; ellipse déduite d'un cercle par affinité orthogonale ; hyperbole rapportée à ses asymptotes. Équation cartésienne d'une conique ; réduction en repère orthonormal. Représentations paramétriques d'une conique. Équation polaire d'une conique dont un foyer est à l'origine, la directrice associée et l'excentricité étant données.

3. Transformations

a) Applications affines ; effets sur la barycentration et sur la convexité. Application linéaire associée. Projections, affinités, symétries.

b) Groupe des transformations affines. Morphisme canonique du groupe affine sur le groupe linéaire ; groupe des translations, groupe des homothéties-translations. Isomorphisme canonique du stabilisateur d'un point O sur le groupe linéaire.

c) Groupe des isométries, groupe des déplacements. Les réflexions engendrent le groupe des isométries ; dans l'espace, les demi-tours engendrent le groupe des déplacements.

Similitudes planes directes et indirectes.

d) Classification des déplacements et des isométries du plan et des déplacements de l'espace à partir de l'ensemble des points invariants.

e) Exemples de recherche du groupe des isométries laissant globalement invariante une configuration du plan ou de l'espace. Exemples de recherche de transformations affines transformant une configuration en une autre.

4. Emploi des nombres complexes en géométrie

a) Racines de l'unité et polygones réguliers.

b) Adjonction d'un point à l'infini au plan complexe.

c) Transformations $z \longmapsto a\overline{z} + b$ et $z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$

§ d) Lignes de niveau des fonctions $z \mapsto z - a$, $z \mapsto \operatorname{Arg}(z - a)$, $z \mapsto \left|\frac{z-a}{z-b}\right|$ et $z \mapsto \operatorname{Arg}\frac{z-a}{z-b}$.

Exemples de familles de courbes orthogonales associées à des transformations simples du plan complexe.

3. ANALYSE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

I. Suites et fonctions

1. Suites de nombres réels et de nombres complexes

a) Suites convergentes, divergentes ; suites extraites.

Opérations algébriques sur les limites. Relations de comparaison : domination (u est dominée par v), prépondérance (u est négligeable devant v) et équivalence (u est équivalente à v). Notations $u = O(v), u = o(v)$ ou $u \ll v$, et $u \sim v$.

b) Toute partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Toute suite croissante majorée de nombres réels converge. Suites adjacentes. Développement décimal d'un nombre réel. Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

c) Toute suite de Cauchy de nombres réels ou complexes converge. De toute suite bornée de nombres réels ou complexes, on peut extraire une suite convergente. Théorème du point fixe pour une application contractante d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ dans lui-même.

§ d) Étude du comportement asymptotique de suites. Approximation d'un nombre réel ou complexe au moyen de suites : rapidité de convergence et performance d'un algorithme. Accélération de convergence : méthode de Richardson–Romberg.

§ e) Exemples d'étude de suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et par une condition initiale.

Approximation d'une solution d'une équation numérique. Méthode de dichotomie. Méthode des approximations successives ; méthodes de Newton, d'interpolation linéaire et d'ajustement linéaire.

2. Fonctions d'une variable réelle

Les fonctions étudiées dans ce paragraphe sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes.

a) Limite d'une fonction en un point ; continuité en un point. Opérations sur les limites et sur les fonctions continues. Image d'une suite convergente par une fonction continue.

Comparaison des fonctions au voisinage d'un point domination, prépondérance et équivalence.

b) Image d'un intervalle par une fonction continue, image d'un segment. Continuité de la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle.

3. Espaces vectoriels normés, réels ou complexes

Les applications étudiées dans ce paragraphe sont définies sur une partie d'un espace vectoriel normé et à valeurs dans un espace vectoriel normé.

a) Normes sur un espace vectoriel réel ou complexe.

Norme, distance associée, boules. Parties bornées, diamètre d'une partie.

Distance d'un point à une partie non vide. Applications lipschitziennes. Produit d'une famille finie d'espaces normés.

Exemples de normes usuelles sur les espaces de suites et de fonctions.

b) Voisinages d'un point d'un espace vectoriel normé, ouverts, fermés ; adhérence, intérieur et frontière d'une partie, parties denses, points isolés, points d'accumulation.

Distance induite sur une partie ; voisinages d'un point, ouverts et fermés d'une partie.

c) Limite d'une application suivant une partie, continuité en un point.

Applications continues, caractérisation par image réciproque des ouverts ou des fermés. Continuité d'une application composée ; homéomorphismes. Applications uniformément continues.

d) Suites convergentes, divergentes. Caractérisation des points adhérents et des applications continues à l'aide de suites.

e) Caractérisation des applications linéaires continues, norme d'une application linéaire continue. Normes équivalentes.

Exemples de normes matricielles.

f) Opérations algébriques sur les limites. Algèbre des fonctions numériques continues.

Algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, base canonique de cette algèbre.

4. Espaces complets

a) Suites de Cauchy, espaces complets ; $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont complets. Parties complètes ; les parties complètes d'un espace complet sont les parties fermées.

b) Séries d'éléments d'un espace vectoriel normé. Séries convergentes, divergentes, absolument convergentes (c'est-à-dire telles que $\sum \|u_n\| < +\infty$). Dans un espace de Banach, critère de Cauchy pour la convergence d'une série, convergence des séries absolument convergentes.

c) Théorème du point fixe pour les contractions d'une partie fermée d'un espace complet.

d) Critère de Cauchy pour les applications (existence d'une limite en un point).

5. Espaces vectoriels de dimension finie

a) Équivalence des normes. Toute suite de Cauchy est convergente. De toute suite bornée on peut extraire une suite convergente. Continuité des applications linéaires et multilinéaires.

b) Définition (séquentielle) des parties compactes. Les parties compactes sont les parties fermées bornées.

Image continue d'un compact, application aux fonctions numériques. Continuité uniforme d'une application continue sur un compact.

6. Espaces préhilbertiens réels ou complexes

Produit scalaire (dans le cas complexe, linéaire à droite, semi-linéaire à gauche), norme associée, inégalité de Cauchy–Schwarz, identité du parallélogramme.

Théorème de Pythagore. Famille orthonormale, méthode de Schmidt.

Existence d'une base orthonormale dans un espace de dimension finie. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, distance à un tel sous-espace.

Exemples de suites de polynômes orthogonaux.

7. Suites d'applications à valeurs dans un espace de Banach

Convergence simple, convergence uniforme. Pour des applications définies sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$: convergence uniforme sur tout compact. Continuité et limite d'une application définie comme limite d'une suite uniformément convergente.

Critère de Cauchy de convergence uniforme. l'espace des applications bornées d'un ensemble dans un espace de Banach, muni de la norme uniforme, est complet. Il en est de même pour l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues d'un espace normé dans un espace de Banach.

8. Notions sur la connexité

Parties connexes ; les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. Image d'une partie connexe par une application continue, théorème des valeurs intermédiaires. Connexité par arcs ; elle implique la connexité et, dans le cas d'un ouvert d'un espace vectoriel normé, elle lui équivaut.

II. Fonctions d'une variable réelle : calcul différentiel et intégral

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle non réduit à un point et à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.

1. Approximation des fonctions sur un segment

Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier ; approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions continues affines par morceaux et par des fonctions polynomiales. Interpolation de Lagrange.

2. Dérivation

a) Opérations sur les dérivées : linéarité, produit, quotient, fonctions composées, fonctions réciproques.

b) Inégalité des accroissements finis pour une fonction continue sur un intervalle et dérivable sur son intérieur ; caractérisation des fonctions constantes et des fonctions lipschitziennes. Prolongement des fonctions de classe C^1 sur un intervalle privé d'un point.

c) Extrémums locaux des fonctions dérivables à valeurs réelles. Théorème de Rolle.

d) Fonction de classe C^k (k entier naturel ou k infini) Si deux fonctions sont de classe C^k, leur composée l'est encore. Caractérisation des C^k-difféomorphismes parmi les fonctions de classe C^k. Formule de Leibniz. Définition des fonctions de classe C^k par morceaux : une fonction f est dite de classe C^k par morceaux sur un segment $[a, b]$ s'il existe une suite finie strictement croissante $a_0 = a, a_1, \ldots, a_n = b$ telle que la restriction de f à chacun des $]a_i, a_{i+1}[$ soit prolongeable en une fonction de classe C^k sur $[a_i, a_{i+1}]$; elle est dite de classe C^k par morceaux sur un intervalle quelconque si sa restriction à tout segment est de classe C^k par morceaux.

e) Fonctions à valeurs réelles : fonctions convexes. Caractérisation des fonctions convexes de classe C^1 par la croissance de la dérivée première et par la position de la courbe par rapport aux tangentes.

3. Intégration sur un intervalle compact

Les seules connaissances exigibles portent sur l'intégration des fonctions continues par morceaux.

a) Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment. Pour les fonctions à valeurs réelles, croissance de l'intégrale.

b) Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

Notations : $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$; $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Linéarité. Si $a \leqslant b$, $\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$.

Pour les fonctions à valeurs réelles, croissance de l'intégrale.

Pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes, inégalité de Cauchy–Schwarz.

c) Additivité par rapport à l'intervalle d'intégration. Approximation de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$ par des sommes de Riemann associées à des subdivisions de $[a, b]$.

d) Primitives d'une fonction continue sur un intervalle. Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral : soit f une fonction continue sur I ; pour tout point a de I, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant au point a ; inversement, pour toute primitive F de f sur I, et pour tout couple (a, b) de points de I, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$. En particulier, pour toute fonction g de classe C^1 sur I, et pour tout couple (a, b) de points de I, $g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t)\,\mathrm{d}t$.

Intégration par parties, changement de variable.

Exemples de calculs de primitives.

e) Inégalité des accroissements finis relative à un couple de fonctions de classe C^1, l'une vectorielle, l'autre réelle. Formule de Taylor à l'ordre p avec reste intégral pour une fonction de classe C^{p+1} ; inégalité de Taylor–Lagrange.

§ f) Calcul des valeurs approchées d'une intégrale. Méthode du milieu (ou des tangentes). Méthode des trapèzes, méthode de Simpson : majoration du reste. Algorithmes d'approximation d'une intégrale par ces deux méthodes.

4. Étude locale des fonctions

a) Développements limités, opérations sur les développements limités.

b) Exemples simples de développements asymptotiques.

Intégration des relations de comparaison au voisinage d'un point entre des fonctions continues ; intégration des développements limités. Théorème de Taylor–Young (existence d'un développement limité d'ordre p pour une fonction de classe C^p).

5. Fonctions usuelles

a) Fonctions exponentielles et logarithmes, fonctions puissances, fonctions hyperboliques directes et réciproques.

b) Fonctions circulaires directes et réciproques. Fonction $t \longmapsto e^{at}$, où a est complexe.

c) Équations fonctionnelles des fonctions linéaires, exponentielles ; logarithmes et puissances.

6. Intégrales impropres

a) Intégrales convergentes, divergentes ; critère de Cauchy. Convergence absolue. Emploi de l'intégration par parties.

b) Intégrales de fonctions positives. Emploi des relations de comparaison pour l'étude de la convergence. Intégration des relations de prépondérance et d'équivalence au voisinage de $+\infty$: cas des intégrales convergentes, cas des intégrales divergentes.

7. Intégrales dépendant d'un paramètre

a) Passage à la limite uniforme dans les intégrales de fonctions continues sur un segment : application à la dérivation de la limite d'une suite de fonctions de classe C^1.

Exemples de passage à la limite dans les intégrales impropres.

b) Continuité et intégration des fonctions de la forme $x \longmapsto \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$, où f est continue ; dérivation lorsqu'en outre $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue.
Exemples d'étude de fonctions définies par des intégrales.

c) Convergence en moyenne, en moyenne quadratique : normes associées.

III. Séries

1. Séries de nombres réels ou complexes

a) Séries à termes positifs. Emploi des relations de comparaison pour l'étude de la convergence. Sommation des relations de prépondérance et d'équivalence ; cas des séries convergentes, cas des séries divergentes.

Comparaison à une série géométrique : règles de Cauchy et de d'Alembert.

Comparaison à une intégrale impropre, Convergence des séries de Riemann ; comparaison à une série de Riemann.

b) Séries à termes réels ou complexes. Convergence d'une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers zéro ; majoration du reste.

Exemples d'emploi de la transformation d'Abel. Exemples d'emploi d'un développement asymptotique du terme général.

c) Somme de deux séries, produit d'une série par un scalaire. Série produit de deux séries absolument convergentes : $w_n = \displaystyle\sum_{p+q=n} u_p v_q$.

d) Exemples d'encadrement ou d'évaluation asymptotique des restes d'une série convergente, des sommes partielles d'une série divergente.

§ e) Recherche de valeurs approchées de la somme d'une série convergente.

2. Séries de fonctions

Les fonctions considérées dans ce paragraphe sont à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.

a) Convergence simple, convergence uniforme sur un ensemble d'une série de fonctions ; convergence normale (pour la norme uniforme).

b) Continuité et limite en un point de la somme d'une série uniformément convergente. Intégration terme à terme d'une série uniformément convergente de fonctions continues sur un segment ; application à la dérivation terme à terme d'une série de fonctions de classe C^1.

c) Exemples d'étude de fonctions définies par des séries.

3. Séries entières

Les coefficients des séries entières considérées dans ce paragraphe sont réels ou complexes.

a) Séries entières d'une variable complexe ; rayon de convergence, disque (ouvert) de convergence, convergence normale sur tout compact du disque de convergence.

b) Séries entières d'une variable réelle : intégration et dérivation terme à terme dans l'intervalle (ouvert) de convergence.

Développement en série entière de $e^x, \ln(1+x)$ et $(1+x)^\alpha$ où α est réel.

c) Définition de $\exp z$ (ou e^z), $\cos z$ et $\sin z$ pour z complexe.

Exponentielle d'une somme, extension des formules de trigonométrie.

4. Séries de Fourier

a) Polynômes trigonométriques ; orthogonalité des fonctions $x \longmapsto e^{inx}$. Coefficients et série de Fourier d'une fonction f 2π-périodique continue par morceaux à valeurs complexes (expression sous forme exponentielle, expression en cosinus et sinus). Sommes partielles $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(f)e^{ikx}$ de la série de Fourier de f ; propriété de meilleure approximation en moyenne quadratique.

b) Lorsque f est continue par morceaux, convergence de S_n vers f en moyenne quadratique ; formule de Parseval. Théorème de Dirichlet ; convergence de $S_n(x)$ vers la demi-somme des limites à droite et à gauche de f au point x lorsque f est de classe C^1 par morceaux. Convergence normale de la série de Fourier d'une fonction continue et de classe C^1 par morceaux.

5. Emploi des séries entières et des séries de Fourier

Exemples de recherche de développements en série entière ou en série de Fourier de fonctions d'une variable réelle.

§ Exemples d'utilisation de tels développements pour obtenir des valeurs approchées d'une fonction.

Exemples d'emploi de séries entières pour la recherche de solutions d'équations différentielles.

IV. Équations différentielles

1. Systèmes linéaires d'ordre 1

a) Écriture matricielle $X' = A(t)X+B(t)$ où A (respectivement B) désigne une application continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $M_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathbb{C}^n$). Existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy (théorème admis). Dimension de l'espace vectoriel des solutions sur I de l'équation $X' = A(t)X$. Méthode de variation des constantes.

b) Systèmes à coefficients constants : exponentielle d'un endomorphisme ; application au problème de Cauchy. Résolution du système $X' = AX$ par réduction de A à une forme diagonale ou triangulaire.

2. Équations linéaires scalaires

a) Équation $X''+a(t)X'+b(t)X = c(t)$, où a, b, c sont continues sur I à valeurs réelles ou complexes. Système d'ordre 1 associé, étude du problème de Cauchy ; solutions de l'équation sans second membre, méthode de variation des constantes. Expression des solutions dans le cas où l'on connaît une solution de l'équation sans second membre associée ne s'annulant pas sur I.

b) Équations linéaires à coefficients constants. Dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène. Cas où le second membre est une exponentielle polynôme.

3. Notions sur les équations non linéaires

a) Solutions d'une équation différentielle $X' = f(t, X)$ (resp. $X'' = f(t, X, X')$), où f est de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{R}^3$). Existence et unicité d'une solution maximale du problème de Cauchy.

§ b) Recherche de solutions approchées d'une équation différentielle scalaire d'ordre 1 par la méthode d'Euler.

c) Résolution des équations des types suivants (en liaison avec la géométrie) : équation associée à une forme différentielle exacte, équation à variables séparables, équation homogène : $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$

d) Exemples d'emploi de changements de variable ou de fonction (en liaison avec des propriétés d'invariance), d'échange de la variabIe et de la fonction, de paramétrages.

§ e) Exemples d'étude qualitative des courbes intégrales d'une équation différentielle. Exemples de recherche des courbes intégrales d'un champ d'éléments de contact ou d'un champ de vecteurs dans le plan.

V. Notions sur les fonctions de plusieurs variables réelles

1. Calcul différentiel

Les fonctions considérées dans ce paragraphe sont définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

a) Limite, continuité, dérivée selon un vecteur, dérivées partielles. Applications de classe C^1 (ou continûment différentiables).

b) Développement limité à l'ordre 1 d'une application de classe C^1 ; différentielle, matrice jacobienne, jacobien. Si deux applications sont de classe C^1, leur composée l'est encore ; difféomorphismes. Matrice jacobienne d'une application composée ou d'une application réciproque (les applications considérées étant de classe C^1). Caractérisation des difféomorphismes parmi les applications injectives de classe C^1. Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe C^1 ; caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe.

c) Dérivées partielles d'ordre k ; théorème de Schwarz. Définition des applications de classe C^k sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (k entier naturel ou k infini). Si deux applications sont de classe

C^k, leur composée l'est encore ; définition des C^k-difféomorphismes.

d) Gradient d'une fonction numérique de classe C^1, points critiques. Formule de Taylor–Young pour une fonction numérique de classe C^1. Étude de l'existence d'un extrémum local (c'est-à-dire d'un maximum local ou d'un minimum local) d'une fonction numérique de deux variables de classe C^2 en un point critique où $rt - s^2 \neq 0$.

2. Calcul intégral

Aucune difficulté théorique ne peut être soulevée sur les notions de ce paragraphe.

a) Champs de vecteurs. Divergence, rotationnel. Intégrales curvilignes. Potentiel scalaire ; condition nécessaire et suffisante d'existence pour un champ de classe C^1 sur un ouvert étoilé.

b) Intégrales doubles et intégrales triples. Linéarité, croissance ; additivité par rapport aux ensembles. Calcul par intégrations successives. Changements de variables ; passage en coordonnées polaires, cylindriques ou sphériques. Exemples de calculs d'aires planes et de volumes.

VI. Notions de géométrie différentielle

1. Courbes et surfaces

l'étude théorique est placée dans des hypothèses très larges. Toutes les formes du théorème des fonctions implicites utiles pour ce paragraphe sont admises.

a) Définitions diverses d'une courbe (plane ou non) et d'une surface, par paramétrages ou par équations.

b) En un point régulier : tangente à une courbe, plan normal ; plan tangent à une surface, normale. Tangente à l'intersection de deux surfaces en un point où les plans tangents sont distincts.

c) Étude locale d'une courbe paramétrée plane : position de la courbe par rapport à une droite ; concavité en un point birégulier, rebroussements, inflexions. Étude de branches infinies. Construction de courbes paramétrées.

d) Étude locale d'une courbe paramétrée de l'espace : plan osculateur en un point birégulier, étude locale en un point trirégulier.

e) Enveloppe d'une famille de droites dans le plan, donnée par une équation $a(t)x+b(t)y+c(t) = 0$, sur un intervalle où $ab' - ba'$ ne s'annule pas.

f) Étude des courbes planes définies par des coordonnées polaires : étude locale, comportement asymptotique, construction.

2. Propriétés métriques des courbes planes

Longueur d'un arc paramétré de classe C^1, abscisse curviligne. Pour un arc birégulier du plan orienté, repère de Frenet, courbure, centre de courbure, développée, développantes.

3. Cinématique du point

a) Vitesse, accélération. Trajectoire, loi horaire. Moment cinétique, dynamique. Énergie cinétique.

b) Exemples de mouvements. Mouvements rectilignes, mouvements circulaires. Mouvements à accélération centrale ; oscillateurs harmoniques, mouvement des planètes.

4. Probabilités et statistiques

1. Espaces probabilisés Expériences aléatoires. Événements. Parallèle entre le vocabulaire probabiliste et le vocabulaire ensembliste à propos des opérations sur les événements.

Tribus. Probabilités. Espace probabilisé (Ω, A, P). Probabilités conditionnelles. Formule des probabilités totales ; formule de Bayes. Indépendance (en probabilité) d'événements ; indépendance mutuelle d'un nombre fini d'événements ; indépendance deux à deux.

Les candidats devront savoir utiliser sur des exemples simples la formule donnant la probabilité d'une réunion finie d'événements (formule de Poincaré, ou de crible). La théorie des espaces probabilisés produits n'est pas au programme. Aucune difficulté théorique ne doit être soulevée sur les espaces probabilisés.

2. Variables aléatoires

Définition d'une variable aléatoire réelle, ou plus généralement à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Événements liés à une variable aléatoire. On admettra que la somme et le produit de deux variables aléatoires sont des variables aléatoires. Les propriétés générales des variables aléatoires sont hors programme. L'objectif est la mise en fonctionnement de ce concept sur les exemples décrits dans les trois alinéas qui suivent. La tribu borélienne de $\mathbb{R}$ n'est pas au programme.

a) Variables aléatoires réelles discrètes.

Loi de probabilité. Fonction de répartition $F(x) = P[X \leqslant x]$. Moments : espérance (ou moyenne), moment d'ordre 2, variance, écart-type. Variables centrées, variables réduites. Variable aléatoire $y = g(X)$ fonction d'une variable aléatoire discrète X, où g est définie sur l'ensemble des valeurs de X. Lois discrètes usuelles : loi uniforme, de Bernoulli, binomiale, hypergéométrique, géométrique, de Poisson.

b) Vecteurs aléatoires (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) discrets.

Loi de probabilité d'un vecteur à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Lois marginales. Lois conditionnelles. Indépendance de deux variables aléatoires réelles. Loi de probabilité d'un vecteur à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Indépendance de n variables aléatoires réelles. Linéarité de l'espérance mathématique. Espérance mathématique du produit de deux variables aléatoires indépendantes. Variance d'une somme de variables aléatoires. Covariance. Coefficient de corrélation linéaire. Stabilité pour la somme des lois binomiales, des lois de Poisson.

Dans de nombreuses situations, on rencontre des exemples simples de fonctions de plusieurs variables aléatoires (sommes, produits). On admettra que si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, toute fonction de $(X_1, \ldots, X_p)$ est indépendante de toute fonction de $(X_{p+1}, \cdots, X_n)$. Aucune théorie générale des fonctions de plusieurs variables aléatoires n'est au programme.

c) Variables aléatoires à densité.

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs réelles admet une densité f si sa fonction de répartition peut s'écrire sous la forme $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est une fonction à valeurs réelles positives ayant un nombre fini de points de discontinuité et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Moments, espérance (ou moyenne), moment d'ordre 2, variance, écart-type. Variable centrées, variables réduites. Exemples simples de fonctions d'une variable aléatoire (tels que $aX + b$, X^2, e^X, ...). Lois définies par une densité usuelle : loi uniforme, exponentielle, normale (ou de Laplace–Gauß). Densité d'un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Indépendance de deux variables aléatoires réelles à densité. Aucune difficulté théorique ne doit être soulevée sur ces questions.

3. Convergence des suites de variables aléatoires. Inégalité de Bienaymé–Tchebychev (cas des variables discrètes et des variables à densité). Convergence en probabilité. Loi faible des grands nombres. Approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale. Approximation de la loi binomiale par la loi de Gauß, par la loi de Poisson.

Énoncé du théorème limite central.

L'étude de la convergence en loi n'est pas au programme.

4. Notions de statistiques.

a) Statistique descriptive : paramètres de position (moyenne, médiane, quantiles, modes) et de dispersion (écart-type, variance). Divers modes de représentation graphique.

b) Échantillons. Intervalle de confiance d'une moyenne ou d'une fréquence.

c) Tests d'hypothèse ; les deux types de risque d'erreur.

d) Tests de paramètres : estimation du paramètre d'une loi binomiale, de la moyenne m d'une loi normale. Test unilatéral, bilatéral.

Comparaison de deux moyennes.

ANNEXE II

Instructions et commentaires

Ils figurent au BOÉN n° 33 du 26 septembre 1991 et au BO Spécial n° 5 du 21 octobre 1993.

Pour les épreuves écrites les candidats doivent se munir de calculatrice afin de s'en servir lorsque ce sera autorisé.

Pour les épreuves orales les calculatrices personnelles sont interdites. Pour les sujets qui en nécessiteraient l'usage, les candidats pourront en emprunter une à la bibliothèque du CAPES.

1.3 Statistiques

1.3.1 Evolution et résultats généraux

Année	Postes	Inscrits	Présents aux deux épreuves écrites	Admissibles	Présents aux deux épreuves orales	Admis
CAPES 2001	990	6972	5676	2109	1946	990 *
CAFEP 2001	215	1095	889	200	194	113
CAPES 2002	1125	6166	4948	2213	2065	1125 *
CAFEP 2002	230	906	745	192	189	118
CAPES 2003	1195	5755	4428	2328	2174	1195
CAFEP 2003	230	846	636	214	209	116
CAPES 2004	1003	5604	4194	2040	1900	1003
CAFEP 2004	177	933	658	205	192	103
CAPES 2005	1310	6086	4074	2473	2236	1310
CAFEP 2005	177	1051	644	279	265	139
CAPES 2006	952	5787	3983	2043	1796	952
CAFEP 2006	135	1096	689	283	265	126
CAPES 2007	952	5388	3875	2102	1840	952
CAFEP 2007	160	1019	693	267	250	123
CAPES 2008	806	4711	3453	1802	1564	806
CAFEP 2008	155	964	631	200	191	90
CAPES 2009	806	4243	3160	1836	1641	806
CAFEP 2009	109	901	633	268	236	109

** En 2001 et 2002, des listes complémentaires avaient été publiées.*

1.3.2 Résultats par catégories

Sont considérés comme présents les candidats qui ont des notes non nulles à toutes les épreuves écrites.

CAPES EXTERNE MATHÉMATIQUES

	Inscrits	Présents	admissibles	Admis
Ensemble	4243	3152	1836	806
Femmes	1891	1497	814	412
Français et U.E.	4229	3145	1833	806
Union Européenne	21	8	3	0
Étrangers hors UE	14	7	3	0
Moins de 30 ans	3243	2695	1619	750
Moins de 25 ans	2049	1834	1195	604

Professions				
	I	P	a	A
DIVERS	640	257	139	30
ELEV.IUFM.1ANN.	1536	1461	910	523
ETUDIANT	935	712	479	176
SANS EMPLOI	355	193	98	25
VAC.2ND DEGRE	109	75	32	11
CONT.2ND DEGRE	339	206	72	11
ASSISTANT EDUC.	329	248	106	30

catégories				
	I	P	a	A
DIVERS	1645	1509	940	527
ETUDIANT	935	712	479	176
ENS.TIT.MEN	113	40	20	3
AG.NON TIT.MEN	902	596	241	60
HORS FP SS EMPL	648	295	156	40

CAFEP CAPES-PRIVÉ MATHÉMATIQUES

	Inscrits	Présents	admissibles	Admis
Ensemble	901	631	268	109
Femmes	499	371	158	78
Moins de 30 ans	581	477	205	90
Moins de 25 ans	280	254	136	74

Professions				
	I	P	a	A
DIVERS	75	32	14	4
ELEV.IUFM.1ANN.	184	169	88	57
ETUDIANT	114	90	55	21
CADRE CONV.COL	25	5	4	2
SECT.TERTIAIRE	14	5	1	1
SANS EMPLOI	74	45	19	4
ENS.FPE NON.TIT	8	6	3	2
MAIT.OU DOC DEL	23	14	2	0
VAC.2ND DEGRE	58	38	17	2
MA	231	174	49	10
CONT.2ND DEGRE	69	39	11	4
ASSISTANT EDUC.	26	14	5	2

catégories				
	I	P	a	A
DIVERS	186	171	89	57
ETUDIANT	114	90	55	21
ENS.TIT.MEN	22	7	2	0
AG.NON TIT.MEN	400	273	85	19
ENSEIGN PRIVE	32	19	5	1
AG.FONC.PUB.ETA	19	11	3	2
HORS FP SS EMPL	128	60	29	9

1.3.3 Résultats par académie

CAPES EXTERNE MATHÉMATIQUES

Académies				
	I	P	a	A
AIX MARSEILLE	218	155	82	28
BESANCON	77	62	47	15
BORDEAUX	172	136	95	48
CAEN	105	89	48	19
CLERMONTFERRAND	84	73	45	25
DIJON	78	65	31	11
GRENOBLE	187	139	94	42
LILLE	291	242	151	73
LYON	216	168	115	54
MONTPELLIER	135	99	44	15
NANCY METZ	141	121	80	51
POITIERS	125	100	68	28
RENNES	188	158	88	35
STRASBOURG	152	112	80	37
TOULOUSE	215	150	91	44
NANTES	183	140	79	34
ORLEANS TOURS	115	85	44	18
REIMS	76	61	48	22
AMIENS	96	62	30	9
ROUEN	107	86	41	16
LIMOGES	49	36	16	5
NICE	143	94	45	14
CORSE	12	11	3	2
REUNION	95	64	32	11
MARTINIQUE	57	29	12	8
GUADELOUPE	79	55	15	6
GUYANNE	20	6	0	0
PARIS/CRET/VERS	762	513	299	127
NOUVELLE CALEDO	28	15	6	4
POLYNESIE	32	22	6	5
MAYOTTE	5	4	1	0

CAFEP CAPES-PRIVÉ MATHÉMATIQUES

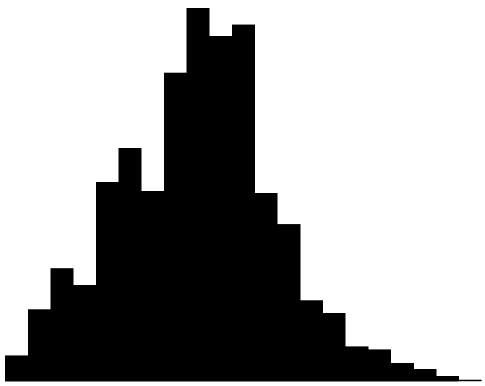
Académies				
	I	P	a	A
AIX MARSEILLE	31	21	14	5
BESANCON	15	11	6	2
BORDEAUX	46	34	20	6
CAEN	17	16	3	1
CLERMONTFERRAND	12	10	2	2
DIJON	13	10	4	1
GRENOBLE	39	28	12	6
LILLE	81	67	27	10
LYON	46	38	13	8
MONTPELLIER	40	23	7	1
NANCY METZ	23	18	9	4
POITIERS	14	10	3	1
RENNES	86	66	27	12
STRASBOURG	28	15	3	1
TOULOUSE	44	25	17	6
NANTES	98	76	31	15
ORLEANS TOURS	24	15	6	2
REIMS	10	6	2	1
AMIENS	26	18	7	3
ROUEN	17	13	5	3
LIMOGES	3	3	2	2
NICE	27	14	5	1
REUNION	6	2	2	0
MARTINIQUE	6	2	2	1
GUADELOUPE	2	2	0	0
GUYANNE	1	1	0	0
PARIS/CRET/VERS	142	86	38	15
NOUVELLE CALEDO	1	0	0	0
POLYNESIE	3	1	1	0

1.3.4 Répartition des notes

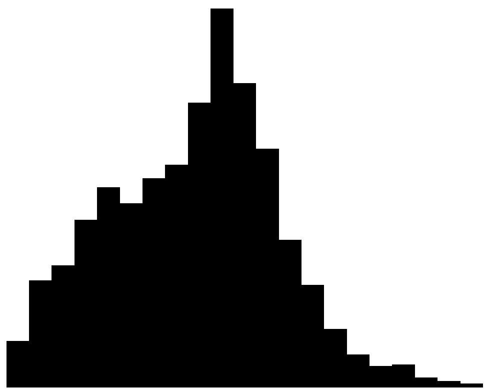
CAPES EXTERNE MATHÉMATIQUES

Écrit : quartiles sur les notes non nulles									
	Présents			admissibles			Admis		
Épreuve 1 (sur 20)	10	8	5	11	10	8	12	10	9
Épreuve 2 (sur 20)	10	8	5	11	10	9	12	11	9
Total écrit (sur 40)	20	16	11	23	19	17	24	21	19

Écrit : histogramme cumulé (sur 20)									
	Total			écrit 1			écrit 2		
	P	a	A	P	a	A	P	a	A
20	0	0	0	2	2	1	4	4	2
19	4	4	2	8	8	3	11	11	3
18	13	13	3	21	21	5	22	22	4
17	29	29	6	41	41	13	47	47	12
16	55	55	16	76	76	33	70	70	21
15	91	91	37	114	114	53	106	106	49
14	137	137	66	189	189	102	170	170	89
13	215	215	121	278	277	165	283	283	167
12	353	353	212	451	450	270	446	446	269
11	577	577	363	658	654	383	709	709	433
10	901	901	543	1051	1033	588	1044	1036	578
9	1288	1288	696	1431	1373	712	1461	1419	712
8	1681	1681	789	1842	1667	778	1775	1658	768
7	2024	1836	806	2182	1795	802	2020	1776	790
6	2307	1836	806	2391	1822	803	2250	1827	805
5	2548	1836	806	2648	1836	806	2453	1834	806
4	2750	1836	806	2867	1836	806	2673	1835	806
3	2925	1836	806	2973	1836	806	2857	1836	806
2	3039	1836	806	3097	1836	806	2991	1836	806
1	3123	1836	806	3176	1836	806	3109	1836	806
0	3152	1836	806	3204	1836	806	3160	1836	806



Écrit 1

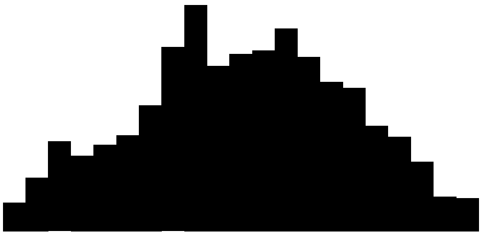


Écrit 2

Oral : quartiles sur les notes non nulles						
	admissibles			Admis		
Épreuve 1 (sur 20)	14	10	5	16	14	11
Épreuve 2 (sur 20)	14	10	7	16	13	10
Total général (sur 80)	47	40	32	52	47	43

Oral et total général (sur 20)						
	Total		oral 1		oral 2	
	a	A	a	A	a	A
20	0	0	48	48	21	21
19	1	1	81	80	43	43
18	1	1	146	140	87	87
17	4	4	206	196	147	144
16	9	9	279	263	214	207
15	40	40	367	341	305	284
14	103	103	467	427	400	356
13	203	203	556	488	511	433
12	354	354	654	560	640	525
11	565	565	728	610	755	590
10	806	806	833	668	868	650
9	1017	806	906	702	973	693
8	1228	806	1016	744	1117	739
7	1382	806	1090	758	1234	768
6	1503	806	1164	780	1314	783
5	1570	806	1231	786	1375	794
4	1585	806	1296	791	1430	801
3	1585	806	1374	799	1478	802
2	1585	806	1454	803	1535	805
1	1585	806	1537	803	1569	805
0	1585	806	1598	806	1587	806

Oral 1

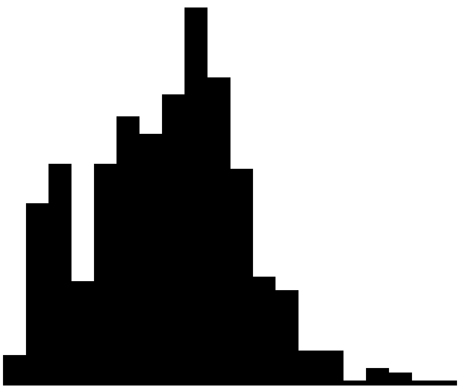


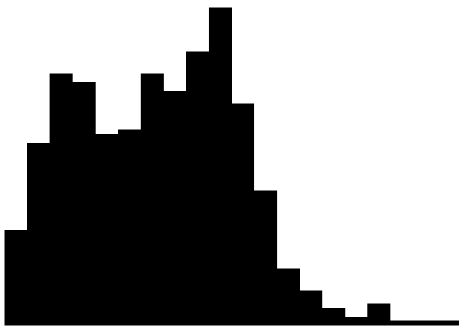
Oral 2

CAFEP CAPES-PRIVÉ MATHÉMATIQUES

Écrit : quartiles sur les notes non nulles									
	Présents			admissibles			Admis		
Épreuve 1 (sur 20)	9	7	4	11	9	8	12	10	9
Épreuve 2 (sur 20)	9	6	3	10	9	8	12	10	9
Total écrit (sur 40)	18	13	8	21	18	16	23	20	18

Écrit : histogramme cumulé (sur 20)									
	Total			écrit 1			écrit 2		
	P	a	A	P	a	A	P	a	A
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	1	1	1	1	1	1
18	1	1	1	2	2	1	2	2	2
17	3	3	2	5	5	3	3	3	3
16	7	7	5	9	9	7	8	8	6
15	7	7	5	10	10	8	10	10	8
14	14	14	12	18	17	15	14	14	12
13	22	22	19	26	25	21	22	22	19
12	28	28	23	48	47	34	35	35	30
11	50	50	40	73	72	51	66	66	47
10	90	90	62	123	119	75	117	117	73
9	158	158	93	194	179	93	190	188	95
8	238	238	106	281	238	104	253	228	103
7	309	268	109	348	261	107	307	247	104
6	375	268	109	406	267	109	365	266	108
5	440	268	109	468	268	109	410	268	109
4	487	268	109	519	268	109	454	268	109
3	533	268	109	543	268	109	510	268	109
2	581	268	109	594	268	109	568	268	109
1	619	268	109	636	268	109	610	268	109
0	631	268	109	643	268	109	632	268	109


Écrit 1


Écrit 2

Oral : quartiles sur les notes non nulles						
	admissibles			Admis		
Épreuve 1 (sur 20)	15	10	5	17	15	11
Épreuve 2 (sur 20)	14	10	7	16	14	11
Total général (sur 80)	47	38	30	53	47	43

Oral et total général (sur 20)						
	Total		oral 1		oral 2	
	a	A	a	A	a	A
20	0	0	5	5	5	5
19	0	0	9	9	8	8
18	1	1	21	21	17	17
17	3	3	29	28	25	24
16	3	3	46	44	33	31
15	5	5	63	56	46	41
14	21	21	74	65	63	57
13	34	34	79	68	77	70
12	49	49	93	76	89	76
11	77	77	101	83	109	82
10	109	109	120	95	122	90
9	140	109	135	100	146	97
8	170	109	150	103	167	102
7	201	109	166	105	185	106
6	228	109	176	106	196	106
5	234	109	183	106	207	107
4	236	109	189	107	215	107
3	236	109	204	109	224	108
2	236	109	214	109	231	109
1	236	109	230	109	234	109
0	236	109	237	109	236	109


Oral 1


Oral 2

Moyennes sur 20 au total des épreuves d'admissibilté

moyenne des candidats	CAPES	CAFEP
présents	7,86	6,50
admissibles	10,15	9,55

Moyennes sur 20 au total des épreuves d'admission

moyenne des candidats	CAPES	CAFEP
présents	9,89	9,93
admis	13,09	13,57

Moyennes sur 20 au total général des 4 épreuves

moyenne des candidats	CAPES	CAFEP
présents	9,91	9,76
admis	11,94	12,10

1.4 Les épreuves écrites

Les épreuves écrites avaient lieu le lundi 9 et le mardi 10 mars 2009.

Il est rappelé que l'absence à une épreuve entraîne l'élimination du candidat. Le retard est aussi une cause d'élimination, les candidats arrivant après la distribution des sujets n'étant pas autorisés à composer.

La définition des épreuves proprement dites, les buts généraux qu'elles poursuivent, ainsi que le programme auquel elles sont limitées, sont détaillées dans les documents officiels (voir la partie qui leur est consacrée dans le rapport).

Les correcteurs élaborent leurs grilles de correction lors d'une réunion plénière, tenue après qu'ils aient eu le temps d'analyser les sujets et de lire un échantillon de copies. Chaque copie est ensuite corrigée deux fois, de manière totalement indépendante. Les deux correcteurs jumelés se concertent à la fin de leur travail pour décider de la note finale.

Aucun commentaire, aucune annotation particulière ne figure sur les copies. Seule la note finale après harmonisation y est inscrite. Les candidats qui souhaitent après coup revoir leur travail pour mieux comprendre le résultat obtenu peuvent, conformément aux dispositions de la loi n° 78.753 du 17 juillet 1978, obtenir satisfaction en s'adressant à la DGRH qui conserve les copies pendant un an à cet effet.

De manière générale, les sujets des épreuves écrites sont construits dans le but de discriminer l'ensemble des candidats, des meilleurs aux plus faibles ; c'est pourquoi de très bonnes notes ont pu être attribuées à des copies n'abordant pas, et même de loin, l'ensemble du sujet. Ce fait que l'on peut trouver contestable s'explique aussi par le souci qu'ont les auteurs de sujets de construire des problèmes offrant un contenu suffisamment construit, notamment aboutissant à un ou des résultats significatifs, et aussi par la nécessité de ne pas trop centrer le texte sur une partie trop réduite du programme. Les questions qui recevront un poids particulièrement significatif dans le classement des candidats ne sont pas distinguables dans l'énoncé (d'autant qu'elles ne s'imposent parfois qu'au moment de la correction des copies), ce qui empêche d'estimer raisonnablement la note à la lecture d'une copie isolée.

1.5 Les épreuves orales

1.5.1 Organisation

Elles ont eu lieu du 26 juin au 19 juillet 2009 l'UFR des Sciences de Versailles (Université de Versailles – St Quentin). Les interrogations avaient lieu tous les jours, dimanches et 14 juillet inclus.
Le jury était séparé en 24 commissions de trois personnes. La composition de ces commissions est déterminée en tenant compte de l'obligation de croiser les compétences, ce qui conduit à faire travailler ensemble des personnes intervenant aux divers niveaux possibles, enseignement secondaire, enseignement post-baccalauréat, enseignement supérieur, université et IUFM, inspection pédagogique régionale. La présence de personnels enseignant en IUFM fait pour chaque cas l'objet d'une réflexion appropriée, le but poursuivi étant d'arbitrer au mieux entre deux nécessités contradictoires : d'un côté, éviter autant que possible des situations où il y aurait confusion des rôles de formateur et d'évaluateur, et d'un autre côté, éviter de trop distendre les liens avec les centres de formation.
Les candidats sont convoqués en début d'après-midi pour l'épreuve d'exposé et le lendemain matin pour l'épreuve sur dossier. Ils passent devant deux commissions jumelées qui échangent leurs candidats pour la seconde épreuve. Chaque commission fait passer les deux types d'épreuves. Un membre de la présidence accueille les candidats avant chaque épreuve afin d'en préciser les modalités et rappeler quelques instructions à son sujet.

Les candidats pouvaient fournir une adresse électronique lors de leur inscription. Immédiatement après signature de la liste des admissibles, les résultats ont été transmis aux adresses connues (plus de 97 % des candidats admissibles ont été dans ce cas cette année).

1.5.2 Conseils pratiques.

Les demandes de déplacements ou reports de la date de la convocation ne sont pas examinées par la présidence du jury, sauf dans les deux cas qui suivent :

— coïncidence entre deux convocations à des concours de recrutement de l'Éducation Nationale auxquels le candidat est simultanément admissible (CAPES et agrégation, ou CAPLP, ou CRPE par exemple) ;

— cas de force majeure, maladie, ou événement familial d'importance majeure.

Lorsque ces demandes sont prises en considération, il n'est pas toujours possible d'y répondre favorablement. Réaliser les arrangements correspondants n'est pas une obligation du jury. La convocation aux épreuves orales se fait par courrier électronique et par courrier postal à l'adresse indiquée par le candidat. Une confirmation par voie électronique est demandée au candidat. Cette expérience mise en œuvre à la session 2008 a montré que plus de 96 % des candidats l'utilisent. Les candidats négligeant cette procédure compliquent et accroissent la tâche de la présidence. En effet, l'organisation quotidienne des convocations ne permet de tenir compte de demandes légitimes de report de convocation que si la présidence du jury est en mesure de trouver les « places » vacantes laissées par les candidats qui, pour diverses raisons, renoncent à passer les épreuves orales.

Il est rappelé aux candidats que l'adresse qu'ils fournissent lors de leur inscription doit être une adresse permanente, valable pour toute la durée des épreuves et pour la phase d'affectation. Ils doivent éventuellement prendre toute disposition pour que le courrier puisse les atteindre pendant toute la période concernée (cf. B.O. spécial n° 13 du 31 août 1995, p. 13).

Une tenue vestimentaire correcte est souhaitable : ce qui est convenable en villégiature ne l'est pas nécessairement devant le jury d'un concours de recrutement. L'utilisation des téléphones portables est interdite dans les locaux du concours, tant pour éviter d'éventuelles fraudes que pour ne pas déranger les candidats par des sonneries intempestives.

Les oraux sont publics. Le nombre important des visiteurs conduit la présidence du jury à réglementer leurs déplacements dans les locaux du concours. Ils ne peuvent y pénétrer que pour accompagner une vague de candidats dans les salles de commission et ne doivent en aucun cas parler aux candidats ou stationner dans les couloirs. Afin de ne pas trop perturber ni les candidats ni le bon fonctionnement du concours, le nombre des visiteurs est limité à au plus trois dans la même salle de commission.

Le CAPES et le CAFEP sont des concours et non des examens ; comme à l'écrit, la note d'oral sert à classer les candidats les uns par rapport aux autres. Cette note a une valeur relative et ne peut refléter ce qui serait la valeur objective d'une épreuve. Il est difficile voire impossible dans les faits pour le candidat de s'évaluer lui-même, et donc de prévoir la note qu'il recevra.

Les notes des épreuves orales font l'objet de deux saisies informatique indépendantes, suivies d'une confrontation des deux saisies et de l'édition de listes, soumises aux commissions pour vérification. Ces dispositifs rendent l'hypothèse d'une erreur de transmission improbable autant qu'il est humainement possible.

1.5.3 L'évaluation des épreuves orales

À un concours de recrutement de l'enseignement secondaire, l'on se trouve au croisement d'exigences de nature assez diverses.

On pourrait se demander pourquoi l'évaluation des compétences purement disciplinaires est présente dans un tel concours, puisque celui-ci s'adresse aux titulaires d'une licence, et que les candidats ont ainsi déjà fait leurs preuves en ce domaine. Cette position mérite d'être discutée, et réfutée, avec soin.

Les licences délivrées par des systèmes de formations assez largement autonomes sont loin d'être uniformes, ce qui justifie déjà le maintien de la présence d'une évaluation disciplinaire au sein du CAPES. De plus, les licences ne peuvent pas toujours suffire en elles-mêmes si leur contenu n'a pas été prévu de manière spécifique pour convenir à un futur enseignant du secondaire. Enfin, il est prévu que certaines personnes, quoique non titulaires d'une licence, ont le droit se présenter au concours. Tous ces facteurs plaident pour le maintien d'une évaluation disciplinaire forte dans les épreuves du CAPES.

Par leur position professionnelle, une majorité des interrogateurs aux épreuves orales sont naturellement attentifs en premier lieu au contenu proprement disciplinaire des prestations. En composant les commissions de manière à varier au mieux les points de vue, il est possible de faire en sorte que la capacité proprement professionnelle soit correctement prise en compte. Même si la vérification finale de l'aptitude à « tenir » devant les élèves repose sur l'évaluation du stage, il est demandé au candidat, lors des deux épreuves orales, de montrer qu'il dispose des qualités nécessaires en matière de communication et de présence devant les auditeurs que sont les membres du jury.

Il n'y a pas de grille chiffrée d'évaluation pour les épreuves orales ; l'on peut simplement définir trois types de compétences pour lesquelles une insuffisance flagrante amène la commission à abaisser la note de manière significative ou déterminante :

— Les compétences en communication : élocution, clarté, attitude envers la commission et capacité de prendre en compte les questions, présentation du tableau, maîtrise du temps, de l'écrit au tableau, de la calculatrice et du rétroprojecteur, etc.

— Les compétences disciplinaires et techniques : l'absence de propositions ou d'affirmations mathématiquement inexactes, la présence relativement au thème traité de connaissances et de résultats cohérents, l'absence de lacune fondamentale relativement à ce thème, le respect des consignes associées au thème et notamment celles concernant l'usage des calculatrices.

— Les compétences de nature pré-professionnelle : connaissance des programmes, capacité à construire des exposés et des choix d'exercices adaptés et progressifs, maîtrise à un niveau suffisant des propositions, démonstrations, solutions que le candidat propose de lui-même.

1.5.4 Première épreuve : exposé sur un thème donné.

Le texte qui suit s'appuie sur la note parue dans le B.O. spécial n° 5 du 21 octobre 1993, qui définit les épreuves du CAPES externe de mathématiques.

La première épreuve orale dure 45 minutes réparties en :

• 25 minutes pour l'exposé, le candidat gère son temps et sa présentation comme il l'entend, le jury n'intervenant pas sur le contenu, et n'interrompant en aucune manière le candidat, sauf éventuellement en cas de problème pratique.

• 20 minutes d'entretien avec la commission.

Les candidats tirent au sort deux thèmes d'exposé et en choisissent un. Ils disposent de deux heures pour préparer l'épreuve. Ils ne disposent d'aucun document autre que les programmes et les instructions relatives au concours. Les candidats ne sont pas autorisés à utiliser leur calculatrice personnelle. Ils utilisent l'un des modèles disponibles. (voir annexe 5.2). Ils peuvent utiliser des transparents ; le jury ne les fournissant pas, il leur est demandé d'apporter des transparents vierges, qui seront dûment identifiés comme tels avant emploi ; les transparents utilisés sont retenus par le jury. Leur nombre n'est pas limité.

Le programme de cette épreuve (cf. B.O. spécial n° 8 du 24 mai 2001 et partie I.2 de ce rapport) est extrait du programme de l'écrit du concours. Les candidats peuvent faire appel à l'intégralité du programme complémentaire (titre B) au cours de cette épreuve, que ce soit pendant leur exposé ou pendant l'entretien avec le jury. Cependant, aucun thème proposé ne peut porter sur les paragraphes extraits du programme complémentaire complétant le programme de cette épreuve (voir partie I.2), ni a fortiori sur d'autres points du programme complémentaire. Pendant l'entretien, le jury a toute latitude pour interroger le candidat sur les programmes de l'enseignement secondaire (titre A, partie I.2). Toute notion abordée par le candidat peut aussi faire l'objet de questions : il est attendu d'un futur enseignant qu'il ne présente à ses élèves que des notions dont il peut parler de manière un tant soit peu construite ; par conséquent, une allusion ou une ouverture sur un point hors du programme de cette épreuve n'est susceptible de valoriser le travail du candidat que si elle repose sur des connaissances suffisamment cohérentes, et si elle s'inscrit de manière logique comme un prolongement acceptable devant une classe du sujet traité. Les thèmes d'exposé proposés forment un ensemble couvrant le programme dans son intégralité et les couplages sont conçus de manière à proposer un vrai choix au candidat, deux thèmes jugés trop proches étant normalement écartés.

L'organisation actuelle du concours ne permet pas l'évaluation des compétences des candidats en matière de TICE au sens ou il n'y a pas d'épreuve devant ordinateur. Cette dimension de l'enseignement est abordée à travers l'usage de calculatrices rétroprojetables, dont la puissance permet d'aborder l'usage élémentaire de tableurs, ainsi que de logiciels — il est vrai rudimentaires — de géométrie. Pour une partie, de plus en plus importante, des sujets, l'illustration de telle ou telle propriété sur une calculatrice est expressément conseillée dans l'intitulé du sujet. Il est vivement conseillé aux candidats de prendre en compte ce conseil.

1.5.5 Seconde épreuve : épreuve sur dossier

L'épreuve sur dossier dure au maximum 45 minutes. Le temps est réparti de la façon suivante :

• Pendant 25 minutes au maximum le candidat expose les réponses aux questions contenues dans le dossier, et notamment son choix d'exercice (objectifs, illustration du thème...).

• Pendant 20 minutes au minimum un entretien s'instaure entre la commission et le candidat, au cours duquel le candidat sera amené à résoudre, entièrement ou en partie, au moins un exercice choisi par la commission parmi l'exercice proposé par le jury et les exercices proposés par le candidat.

Les remarques concernant les TICE sont identiques à celles données pour la première épreuve orale (voir partie 5.4 ci-dessus). Les candidats ne sont pas autorisés à utiliser leur calculatrice personnelle. Ils empruntent l'un des modèles disponibles (voir annexe 5.2). Il y a cependant une différence importante entre les deux épreuves. En effet, les tâches que le candidat doit accomplir pendant sa préparation, ainsi que pendant l'épreuve proprement dite, incluent pour une partie appréciable des dossiers des tâches devant explicitement être réalisées sur calculatrice. Il est bien évident que le non-respect de cette consigne se traduit de manière forte dans la notation de l'épreuve.

Les candidats peuvent utiliser des transparents ; le jury ne les fournissant pas, il leur est demandé d'apporter des transparents vierges, qui seront dûment identifiés comme tels avant emploi ; les transparents utilisés sont retenus par le jury. Leur nombre n'est pas limité.

L'épreuve sur dossier se place au niveau de l'enseignement secondaire (cf. B.O. n° 21 du 26 mai 1994). Il n'y a aucune extension de programme dans ce cas.

Chaque dossier fait référence à un thème, dont l'intitulé plus ou moins long (le contenu correspondant étant plus ou moins large) figure dans l'en-tête du dossier. Il est essentiel pour le candidat d'interpréter de manière très précise cet intitulé ; notamment, le ou les exercices qu'il adjoint à celui proposé par le jury doivent constituer des illustrations de ce thème tel qu'il est défini, dans toute son ampleur.

Les candidats ont deux heures pour préparer l'épreuve et peuvent utiliser les ouvrages imprimés disponibles dans le commerce, vierges de toute annotation manuscrite. Ils peuvent les apporter ou en emprunter à la bibliothèque du concours. Le jury peut s'opposer à l'utilisation de certains ouvrages s'il juge que cela risque de dénaturer l'épreuve (cf. B.O. spécial n° 5 du 21 octobre 1993).

La bibliothèque possède un certain nombre de manuels usuels, et pour quelques éditions un assez grand nombre, mais la fourniture d'un ouvrage déterminé ne peut en aucun cas être garantie. C'est pourquoi nous rappelons ici aux candidats qu'ils ont le droit d'utiliser leurs propres manuels. Afin que tous les candidats puissent disposer d'un réel choix, chacun ne peut emprunter plus de cinq ouvrages simultanément.

1.5.6 Commentaires sur l'utilisation de la calculatrice

Un certain nombre de sujets de première épreuve comportent une mention invitant les candidats à illustrer leur exposé par un ou plusieurs exemples nécessitant l'usage d'une calculatrice. Les candidats ont la possibilité de projeter l'écran de la calculatrice qu'ils utilisent, comme ils le feraient devant une classe. Par ailleurs, une partie significative des dossiers de seconde épreuve inclut de manière explicite et obligatoire l'usage de la calculatrice.

L'appréciation par le jury de l'usage des calculatrices — avec ou sans rétroprojection — met en évidence que, si souvent cet usage n'apporte pas de valeur ajoutée à la prestation du candidat (il s'agit par exemple de l'usage de la calculatrice à de simples fins opératoires), les utilisations à but pédagogique pertinent, et les démonstrations brillantes, deviennent nettement plus nombreuses d'année en année.

Les candidats et futurs candidats au CAPES externe de mathématiques doivent prendre en compte le fait que, pour le moment, l'aptitude à utiliser les TICE n'y est évaluée qu'à travers l'usage des calculatrices scientifiques. Les modèles admis au concours contiennent tous les fonctions attendues dans les programmes : tableur et logiciel de géométrie ; ils contiennent aussi des fonctions de calcul formel.

Les conditions de rétroprojection dépendent des salles, mais chaque commission a fait de son mieux pour installer les appareils de manière à pouvoir évaluer convenablement les prestations des candidats sur ce point, en faisant naturellement abstraction de la qualité technique de la projection.

2 ÉNONCES ET ANALYSE DES ÉPREUVES ÉCRITES

2.1 Énoncé de la première épreuve

Notations

• Si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour un polynôme $P(X) \in K[X]$, on notera P la fonction polynôme associée à $P(X)$.

• Si deux suites numériques $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont équivalentes, on notera $u_n \sim_n v_n$. De même, si f et g sont deux applications réelles définies au voisinage d'un point x_0 et équivalentes en x_0, on notera $f(x) \sim_{x_0} g(x)$. Quand le voisinage sera un voisinage à droite en x_0, on précisera $f(x) \sim_{x_0^+} g(x)$.

• On rappelle que le *produit au sens de Cauchy* de deux séries (réelles ou complexes) $\sum u_n$ et $\sum v_n$, est la série $\sum w_n$ où le terme général w_n est défini pour $n \geqslant 0$ par $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_n v_{n-k}$. On rappelle aussi que si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors la série produit $\sum w_n$ est aussi absolument convergente et l'on a

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

Objectifs du problème

Ce sujet aborde une série de résultats et de propriétés relatifs à la formule de Stirling [1] ainsi qu'aux polynômes et nombres dits de Bernoulli [2]. Il se compose de quatre parties.

Dans la partie I, on établit la formule de Stirling qui donne un équivalent simple de la suite $(n!)_n$. Ce travail utilise les intégrales de Wallis [3], qui sont étudiées au début de la partie. La fin de la partie I est une application des intégrales de Wallis et de la formule de Stirling à l'étude du volume des boules dans $\mathbb{R}^n$.

La partie II s'intéresse aux polynômes et nombres de Bernoulli. On y étudie certaines de leurs propriétés et l'on donne deux applications de cette étude. La première, arithmétique, s'intéresse au calcul des sommes du type $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} k^p$. La deuxième est consacrée au développement en série entière de la fonction $\dfrac{te^{xt}}{e^t - 1}$.

Dans la partie III, on introduit la fonction ζ de Riemann [4] et l'on explicite ses valeurs prises sur les entiers positifs pairs au moyen des nombres de Bernoulli. Ce calcul permet, avec la formule de Stirling, d'expliciter un équivalent simple pour la suite des nombres de Bernoulli.

Dans la partie IV, on revient à la formule de Stirling et l'on décrit une méthode pour obtenir un raffinement asymptotique de la formule.

Les parties de ce sujet ne sont pas indépendantes, chacune d'elles pouvant utiliser des résultats établis dans celles qui la précèdent. Aussi pourra-t-on utiliser pour traiter certaines questions, les résultats établis dans les questions précédentes sans les démontrer. Il est toutefois vivement conseillé aux candidats d'aborder linéairement ce sujet.

1. James, mathématicien anglais, Garden 1692 - Edimbourg 1770.
2. Jakob (francisé en Jacques), mathématicien suisse, premier d'une longue lignée familiale de mathématiciens. Bâle 1654 - Bâle 1705.
3. John, mathématicien anglais, Ashford 1616 - Oxford 1703.
4. Georg Friedrich Bernhard, mathématicien allemand, Breselenz 1826 - Selasca 1866

I. Intégrales de Wallis et formule de Stirling.

I.1. Intégrales de Wallis.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx$$

I.1.a. Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, on a $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.
(Indication. On pourra, par exemple, utiliser un changement de variables.)

I.1.b. Montrer que la suite $(W_n)_n$ est strictement décroissante.
(Indication. Pour la décroissance, on pourra comparer les fonctions $x \mapsto \cos^n(x)$ et $x \mapsto \cos^{n+1}(x)$. Pour la stricte décroissance, on pourra raisonner par l'absurde.)

I.1.c. A l'aide d'une intégration par parties montrer que, pour $n \geqslant 0$, on a

$$W_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right) W_n$$

I.1.d. En déduire que, pour tout entier $p \geqslant 0$, on a

$$\begin{cases} W_{2p} & = & \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2} \\ W_{2p+1} & = & \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}$$

I.1.e. Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

(Indication. On pourra utiliser la question précédente en distinguant suivant la parité de l'entier n.)

I.1.f. Prouver que, pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$1 - \frac{1}{n+2} < \frac{W_{n+1}}{W_n} < 1$$

et en déduire que $W_n \sim_n W_{n+1}$.
(Indication. On pourra utiliser la question I.1.b.)

I.1.g. Montrer finalement que $W_n \sim_n \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$. En déduire $\lim\limits_n W_n$.

I.2. Formule de Stirling.

On considère la suite $(u_n)_n$ définie, pour $n \geqslant 1$, par

$$u_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$$

et la suite auxiliaire $(v_n)_n$ définie, pour $n \geqslant 2$, par

$$v_n = \ln u_n - \ln u_{n-1}$$

I.2.a. Exprimer simplement v_n en fonction n et donner un développement limité à l'ordre 2 en $1/n$ de la suite $(v_n)_n$.

I.2.b. En déduire que la série $\sum v_n$ est convergente. Montrer alors que les suites $(\ln u_n)_n$ et $(u_n)_n$ convergent et donc qu'il existe un réel $K > 0$ tel que

$$n! \sim_n K \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$$

I.2.c. En utilisant cet équivalent, calculer un équivalent simple de la suite $(W_{2p})_p$. En déduire que $K = \sqrt{2\pi}$ et, par suite, que

$$n! \sim_n \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

(Formule de Stirling)

I.3. Une autre application des intégrales de Wallis.

[**Rappel sur les intégrales multiples et généralisation.** (Ce rappel n'est utile que pour les sous-questions I.3.a. et I.3.c. de cette question I.3.)
Les notions d'intégrales doubles et triples ainsi que la méthode de calcul par intégrations successives de ces dernières (présentes au programme), se généralisent à toute dimension finie de la manière suivante : étant donné un entier $n \geqslant 1$*, une partie* $A_n \subset \mathbb{R}^n$ *sera dite continûment paramétrable si* $n = 1$ *et* A_1 *est un segment ou si* $n \geqslant 2$ *et s'il existe une partie* $A_{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ *continûment paramétrable et deux fonctions continues* $f, g : A_{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ *telles que*

$$A_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \ (x_1, \cdots, x_{n-1}) \in A_{n-1} \text{ et } f(x_1, \cdots, x_{n-1}) \leqslant x_n \leqslant g(x_1, \cdots, x_{n-1})\}$$

Avec ces notations, pour une fonction continue $\varphi : A_n \longrightarrow \mathbb{R}$*, on définit l'intégrale multiple de* φ *sur* A_n *par la formule suivante :*

$$\int \cdots \int_{A_n} \varphi(x_1, \cdots, x_n) d_{x_n} \cdots d_{x_1} = \int \cdots \int_{A_{n-1}} \left(\int_{f(x_1, \cdots, x_{n-1})}^{g(x_1, \cdots, x_{n-1})} \varphi(x_1, \cdots, x_n) d_{x_n} \right) d_{x_{n-1}} \cdots d_{x_1}$$

On admettra, sans démonstration, qu'à l'instar des intégrales doubles et triples, le réel ainsi obtenu ne dépend que de la partie A_n *et de la fonction* φ*. Le volume de la partie* A_n *sera alors, par définition, le réel* $\int \cdots \int_{A_n} d_{x_n} \cdots d_{x_1}$.]

On se propose d'étudier ici le comportement du volume d'une boule de rayon fixé quand on fait varier la dimension de l'espace. Plus précisément, on se fixe un réel $R > 0$ *et pour tout entier* $n \geqslant 1$ *on considère dans* $\mathbb{R}^n$ *la boule* $\mathcal{B}_n$ *de centre* O *et de rayon* R *:*

$$\mathcal{B}_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \ x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant R^2\}$$

On note V_n *son volume.*

I.3.a. Montrer que, pour $n \geqslant 2$, pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{B}_n \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x_1, \cdots, x_{n-1}) \in \mathcal{B}_{n-1} \\ \\ -\sqrt{R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2} \leqslant x_n \leqslant \sqrt{R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2} \end{array} \right.$$

En déduire par récurrence sur $n \geqslant 1$, que $\mathcal{B}_n$ est continûment paramétrable.

I.3.b. Soient $\lambda > 0$ un réel et $m \geqslant 0$ un entier. Montrer, en se servant par exemple d'un changement de variable utilisant la fonction $t \mapsto \lambda \sin t$, que

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \left(\lambda^2 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} dx = 2\lambda^{m+1} W_{m+1}$$

I.3.c. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $k = 1, \cdots, n-1$ on a

$$V_n = 2^k \left(\prod_{i=1}^{k} W_i \right) \int \cdots \int_{\mathcal{B}_{n-k}} \left(R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-k}^2\right)^{\frac{k}{2}} dx_{n-k} \cdots dx_1$$

(Indication. On pourra, pour n fixé, faire une récurrence finie sur k.)

I.3.d. Prouver finalement que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$V_n = \left(\prod_{i=1}^{n} W_i \right) (2R)^n$$

et par suite, que pour $k \geqslant 1$

$$V_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} R^{2k}$$

et que pour $k \geqslant 0$

$$V_{2k+1} = 2^{2k+1} \frac{k!}{(2k+1)!} \pi^k R^{2k+1}$$

Expliciter V_1, V_2, V_3 et V_4.

I.3.e. En utilisant la formule de Stirling, donner des équivalents simples des suites $(V_{2k})_k$ et $(V_{2k+1})_k$.

I.3.f. En déduire que $\lim_n V_n = 0$.

I.3.g. Montrer que, soit la suite $(V_n)_n$ est décroissante, soit il existe un rang n_0 tel que la suite $(V_n)_n$ soit croissante jusqu'au rang n_0, puis décroissante.
(Indication. On pourra calculer simplement le rapport V_{n+1}/V_n grâce à la question I.3.d. et utiliser les questions I.1.b. et I.1.g.)

I.3.h. Donner les valeurs de R pour lesquelles la suite $(V_n)_n$ est décroissante.

I.3.i. Que vaut le rang n_0 de la question I.3.g. quand $R = 1$?

II. Polynômes et nombres de Bernoulli.

II.1. Définitions.

II.1.a. Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q^{'} = P$ et $\displaystyle\int_0^1 Q(x)dx = 0$.

II.1.b. En déduire qu'il existe une unique suite de polynômes réels $(B_n(X))_n$ vérifiant

- $B_0(X) = 1$
- $\forall n \geqslant 1,\ B_n^{'} = nB_{n-1}$
- $\forall n \geqslant 1,\ \displaystyle\int_0^1 B_n(x)dx = 0$

On appelle $(B_n(X))_n$ *la* suite des polynômes de Bernoulli. *Pour tout* $n \geqslant 0$*, on pose* $b_n = B_n(0)$*.*
La suite de réels $(b_n)_n$ *est appelée* suite des nombres de Bernoulli.

II.1.c. Expliciter $B_n(X)$ et b_n pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

II.2. Premières propriétés.

II.2.a. Quel est le degré de $B_n(X)$ pour $n \geqslant 0$?

II.2.b. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a $B_n(0) = B_n(1)$.

II.2.c. Prouver par récurrence que, pour tout $n \geqslant 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} b_{n-k} x^k$$

où $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ désigne le coefficient binômial : $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

II.2.d. En déduire, pour $n \geqslant 1$, une expression de b_n en fonction de $b_0, \cdots, b_{n-1}$. Calculer b_5 et b_6.

II.2.e. Montrer que la suite $(b_n)_n$ est une suite de rationnels et que, pour $n \geqslant 0$, les polynômes $B_n(X)$ sont à coefficients rationnels.

II.2.f. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose

$$C_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$$

Montrer, en utilisant la définition des polynômes de Bernoulli, que pour tout $n \geqslant 0$ on a $C_n(X) = B_n(X)$.

II.2.g. En déduire que

$$\begin{cases} \bullet\ \forall n \geqslant 1,\ b_{2n+1} = 0 \\ \bullet\ \forall n \geqslant 0,\ B_{2n+1}(\frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$$

II.3. Etude des variations de B_n sur $[0,1]$.

II.3.a. Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$. Etablir que, si P est non nul et de signe constant sur $[0,1]$, alors on a $\displaystyle\int_0^1 P(x)dx \neq 0$.

II.3.b. Montrer, par récurrence sur $n \geqslant 1$, que B_{2n} vérifie

$$\begin{cases} \bullet\ (-1)^n B_{2n}(0) < 0 \\ \bullet\ (-1)^n B_{2n}(1) < 0 \\ \bullet\ (-1)^n B_{2n}(\frac{1}{2}) > 0 \\ \bullet\ \text{la fonction } (-1)^n B_{2n} \text{ est strictement croissante sur } [0,\frac{1}{2}] \text{ et strictement décroissante} \\ \quad \text{sur } [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

et que B_{2n+1} vérifie

$$\begin{cases} \bullet\ (-1)^n B_{2n+1}(0) = (-1)^n B_{2n+1}(1) = (-1)^n B_{2n+1}(\frac{1}{2}) = 0 \\ \bullet\ \text{il existe deux réels } \alpha_{2n+1} \in]0,\frac{1}{2}[\text{ et } \beta_{2n+1} \in]\frac{1}{2},1[\text{ tels que la fonction } (-1)^n B_{2n+1} \\ \quad \text{soit strictement décroissante sur } [0,\alpha_{2n+1}] \text{ puis strictement croissante sur } [\alpha_{2n+1},\beta_{2n+1}] \\ \quad \text{puis strictement décroissante sur } [\beta_{2n+1},1] \end{cases}$$

(Indication. Il pourra être judicieux d'aborder en même temps la récurrence sur ces six propriétés.)

II.3.c. En déduire que le signe du réel b_{2p} est $(-1)^{p+1}$.

II.3.d. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $B_n^*(X) = B_n(X) - b_n$. Pour $n \geqslant 1$, donner l'allure générale des courbes représentatives des fonctions B_{4n-2}^*, B_{4n-1}^*, B_{4n}^*, B_{4n+1}^* sur l'intervalle $[0,1]$.

II.4. Une application arithmétique.

II.4.a. Montrer, par récurrence sur $n \geqslant 1$, que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

II.4.b. Soient $p \geqslant 1$ et $N \geqslant 0$ deux entiers. On pose $S_p(N) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} k^p$, montrer en utilisant la question II.4.a. que

$$S_p(N) = \frac{B_{p+1}(N+1) - b_{p+1}}{p+1}$$

II.4.c. Calculer explicitement, en fonction de l'entier naturel N, les sommes $S_p(N)$ pour $p = 1,2,3$.

II.5. Une application analytique.

II.5.a. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \frac{b_n}{n!}t^n$ est égal à 2π.

(Indication. On pourra, par exemple, déterminer les réels $t > 0$ pour lesquels la suite $(\frac{|b_n|}{n!}t^n)_n$ reste bornée. A cet effet, on pourra utiliser la formule de Stirling et admettre pour cette question que l'on a l'équivalent $b_{2p} \sim_p (-1)^{p+1}\left(\frac{p}{\pi e}\right)^{2p}\sqrt{16\pi p}$. Ce dernier résultat sera établi dans la question III.2.e. à venir.)

II.5.b. Calculer le produit au sens de Cauchy des séries entières

$$\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{t^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{b_n}{n!}t^n\right)$$

et en déduire que, pour tout $t \in]-2\pi, 2\pi[$, on a

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{b_n}{n!} t^n$$

II.5.c. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in]-2\pi, 2\pi[$, on a

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{B_n(x)}{n!} t^n$$

II.5.d. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{B_n(x)}{n!} t^n$ est bien 2π.

(Indication. On pourra regarder dans $\mathbb{C}$ le comportement de la série entière au voisinage du cercle $|z| = 2\pi$.)

III. Fonction ζ de Riemann et nombres de Bernoulli.

III.1. Fonction ζ.

On appelle fonction ζ de Riemann (réelle) la fonction de la variable $s \in \mathbb{R}$ définie par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s}$$

III.1.a. Soit $s > 0$. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a

$$\frac{1}{(k+1)^s} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} < \frac{1}{k^s}$$

En déduire que la nature (divergence ou convergence) de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s}$ est la même que celle de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s}$.

III.1.b. Donner le domaine de définition de ζ et prouver qu'elle est strictement décroissante sur celui-ci.

III.1.c. Montrer que $\zeta(s) \sim_{1^+} \frac{1}{s-1}$ et en déduire $\lim_{s \to 1^+} \zeta(s)$.

III.1.d. Soit $a > 1$ un réel. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s}$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$. En déduire que ζ est continue sur son domaine de définition et que $\lim_{s \to +\infty} \zeta(s) = 1$.

III.1.e. Montrer que, pour tout $s > 0$, la série $\theta(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ converge. Prouver que, pour tout $s > 1$, on a

$$\theta(s) = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right) \zeta(s)$$

III.2. Calcul de $\zeta(2p)$.

Pour toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, on note

$$c_k(f) = \int_0^1 f(x) e^{-2ik\pi x} dx$$

le k-ième coefficient de Fourier de la fonction f. On rappelle sans démonstration que, si f et g sont deux fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$, alors on a

$$\int_0^1 \overline{f(x)}g(x)dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{c_k(f)}c_k(g)$$

(où $z \mapsto \overline{z}$ désigne la conjugaison complexe).

III.2.a. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient $c_k(B_n)$.
(Indication. Pour $k \neq 0$ et $n \geqslant 2$, on cherchera une relation entre $c_k(B_n)$ et $c_k(B_{n-1})$.)

III.2.b. Soient $n, m \geqslant 1$ deux entiers. Montrer que

$$\int_0^1 B_n(x)B_m(x)dx = \sum_{k=1}^{+\infty} [c_{-k}(B_n)c_k(B_m) + c_k(B_n)c_{-k}(B_m)]$$

et en déduire la valeur de cette intégrale au moyen de valeurs de la fonction ζ.
(Indication. On distinguera les cas $n+m$ pair et $n+m$ impair.)

III.2.c. Pour $p \geqslant 1$, calculer $\displaystyle\int_0^1 B_1(x)B_{2p-1}(x)dx$ en intégrant par parties. En déduire que

$$\zeta(2p) = (-1)^{p+1}\frac{b_{2p}}{2}\frac{(2\pi)^{2p}}{(2p)!}$$

III.2.d. Donner les valeurs de $\zeta(2)$, $\zeta(4)$ et $\zeta(6)$. En déduire les valeurs des sommes

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2},\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4},\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^6}$$

et des sommes

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2n+1)^2},\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2n+1)^4},\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2n+1)^6}$$

III.2.e. En utilisant les questions III.1.d. et III.2.c. ainsi que la formule de Stirling, montrer que

$$b_{2p} \sim_p (-1)^{p+1}\left(\frac{p}{\pi e}\right)^{2p}\sqrt{16\pi p}$$

III.3. Application numérique.

III.3.a. Soient $s > 1$ et $N \geqslant 1$. Montrer que

$$\sum_{n\geqslant N+1}\frac{1}{n^s} \leqslant \frac{N^{1-s}}{s-1}$$

III.3.b. Etant donné un réel $\epsilon > 0$, expliciter un entier N_0 tel que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N_0}\frac{1}{n^s}$ soit une approximation à ϵ près de $\zeta(s)$.

III.3.c. Déduire de ce qui précéde, une approximation rationnelle A de π^6 à 10^{-2} près.

III.3.d. Majorer l'erreur commise en prenant $\sqrt[6]{A}$ comme approximation de π. Combien de décimales de π cette approximation permet-elle de donner ? Les donner.

IV. Formule de Stirling généralisée.

On considère la suite $(\Omega_n)_n$ définie, pour $n \geqslant 0$, par $\Omega_n = \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$.

On sait, d'après la partie I, que l'on a $\Omega_n = 1 + o(1)$. *On se propose ici de décrire une méthode pour obtenir un développement limité en* $1/n$ *à un ordre donné de la suite* $(\Omega_n)_n$*, autrement dit on veut raffiner la formule de Stirling.*

IV.1. On se fixe un entier $N \geqslant 2$.

IV.1.a. Montrer que $\ln \Omega_N = \ln \Omega_1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} \left(1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$.

IV.1.b. Montrer que la fonction $t \mapsto \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) \ln(1+t)$ est développable en série entière en 0. Préciser son développement ainsi que le rayon de convergence de ce développement.

IV.1.c. En déduire que

$$\ln \Omega_N = \ln \Omega_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k-1}{2k(k+1)} \left(\zeta(k) - \sum_{n \geqslant N} \frac{1}{n^k}\right)$$

IV.1.d. Montrer que la série $\sum (-1)^{k+1} \dfrac{k-1}{2k(k+1)} \zeta(k)$ est convergente.

(Indication. On pourra utiliser le critère des séries alternées.)

IV.1.e. En déduire que

$$\ln \Omega_N = \ln \Omega_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k-1}{2k(k+1)} \zeta(k) - \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N)$$

où $R_k(N) = \displaystyle\sum_{n \geqslant N} \frac{1}{n^k}$.

IV.2.

IV.2.a. Prouver que, pour tout $k \geqslant 2$ et tout $N \geqslant 2$, on a

$$\frac{1}{k-1} . \frac{1}{N^{k-1}} \leqslant R_k(N) \leqslant \frac{1}{k-1} . \frac{1}{N^{k-1}} + \frac{1}{N^k}$$

IV.2.b. En déduire que, pour tout entier $p \geqslant 2$, on a

$$\sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^k \frac{(k-1)}{2k(k+1)} R_k(N) = o\left(\frac{1}{N^{p-2}}\right)$$

IV.3.

IV.3.a. Montrer que

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{(k-1)}{2k(k+1)} \zeta(k) = 1 - \frac{1}{2} \ln 2\pi$$

et que, pour tout $N \geqslant 2$, on a

$$\ln \Omega_N = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N)$$

IV.3.b. Déduire de ce qui précède que, si les suites $(R_2(N))_N$, $\cdots$, $(R_{p+1}(N))_N$ possèdent des développements limités en $1/N$ à l'ordre p, alors la suite $(\ln \Omega_N)_N$ en possède aussi un et que celui-ci est égal à celui de la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{p+1} (-1)^k \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N)\right)_N$.

IV.3.c. Montrer que la suite $(\ln \Omega_N)_N$ possède un développement limité en $1/N$ à l'ordre 1. En déduire celui de la suite $(\Omega_N)_N$ à cet ordre.

IV.4.

IV.4.a. Montrer que, pour $N \geqslant 1$, on a $R_2(N) - \dfrac{1}{N} = \displaystyle\sum_{n \geqslant N} \frac{1}{n^2(n+1)}$.

IV.4.b. En comparant cette dernière série à l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$, donner le développement limité de la suite $(R_2(N))_N$ en $1/N$ à l'ordre 2. En déduire le développement limité de la suite $(\ln \Omega_N)_N$ puis de la suite $(\Omega_N)_N$, en $1/N$ à l'ordre de 2.

IV.4.c. En généralisant ce qui vient d'être fait, décrire brièvement les étapes à suivre pour trouver un développement limité de la suite $(\Omega_N)_N$, en $1/N$ à un ordre donné.

FIN

2.2 Description de l'épreuve

L'épreuve d'analyse de cette année abordait les polynômes et nombres de Bernoulli et la formule de Stirling généralisée. Il s'agissait là d'un sujet sur un thème très classique et très classiquement rencontré en premier cycle universitaire. L'épreuve comportait quatre parties.

La partie I. était consacrée aux intégrales de Wallis. On y donnait deux applications : la formule de Stirling (I.2.) qui fournit un équivalent simple de la suite $(n!)_n$ et le calcul et l'étude du volume de la boule euclidienne en toute dimension (I.3.).

La partie II. s'intéressait aux polynômes et nombres de Bernoulli. Dans les questions II.1,2,3. on étudiait les propriétés classiques de ces derniers, en particulier leurs variations sur l'intervalle $[0, 1]$. Les parties II.4. et II.5. présentaient chacune une application. La première, arithmétique, faisait exprimer les sommes du type $S_p(N) = \sum_{k=0}^{N} k^p$ en fonction des polynômes et nombres de Bernoulli. La deuxième était analytique et concernait le développement en série entière de la fonction $t \longmapsto \dfrac{te^{xt}}{e^t - 1}$.

Dans la partie III, on calculait les valeurs de la fonction zéta de Riemann en les entiers naturels pairs. Après une courte introduction de cette fonction (III.1.), on décrivait (III.2.) une méthode utilisant les séries de Fourier pour arriver à ce calcul. On déduisait alors de cette étude (III.2.e.) un équivalent simple de la suite des nombres de Bernoulli.

Dans la partie IV. on revenait à la formule de Stirling que l'on tentait de généraliser. On cherchait à donner un développement limité de la suite de terme général $\dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$.

Le sujet a abordé volontairement un thème classique et, en principe, bien étudié en premier cycle universitaire. Il a été conçu pour ne présenter que des questions élémentaires relevant du programme de la licence. La partie I, la plus massivement abordée par les candidats, était d'un niveau élémentaire et ne nécessitait aucune connaissance théorique poussée. On aurait pu s'attendre à ce que la qualité mathématique des copies s'en voit renforcée, c'est en fait le contraire qui s'est produit. Le jury a constaté, lors de la correction de cette épreuve, une massification inquiétante des erreurs et des fautes de raisonnement. Dans le même ordre d'idée, on constate une raréfaction du nombre de bonnes copies par rapport aux années antérieures. Les erreurs fréquemment relevées poussent à penser que pour une proportion inquiétante des candidats les mathématiques se résument à des formules mal comprises et mal appliquées, sans substance et parfois sans sens. Le souci de rigueur et d'esprit analytique semble disparaître au profit d'approximations du langage et de la pensée, ce qui d'un point de vue épistémologique est aux antipodes de la substance même des mathématiques et de leur enseignement. Ce constat ne peut faire qu'interroger la communauté sur la formation des futurs enseignants du secondaire.

2.3 Analyse des prestations

Les candidats ont significativement abordé la partie I du sujet ainsi que les questions II.1. et II.2. La sélection s'est donc globalement opérée sur cette partie-là du sujet. La question II.3. semble avoir rebuté beaucoup des candidats qui l'ont atteinte, la majorité d'entre eux ayant préféré passer directement aux questions suivantes. La question II.4. fut peu abordée, mais globalement bien. On peut donc considérer qu'elle a concerné les bons candidats. La question II.5. fut peu et mal traitée, les raisonnements sur les séries entières semblant être mal maitrisés.

Assez curieusement, un nombre non négligeable de candidats s'est lancé dans la partie III, essentiellement dans la question III.1. Les prestations sur cette question sont assez désastreuses, se résumant le plus généralement à des passages à la limite hasardeux. Quelques copies sauvent toutefois le lot. La question III.2. est peu et mal abordée, les calculs ne sont pas menés à terme. L'explication réside probablement dans le fait qu'elle a du être abordée en fin d'épreuve.

La partie IV. n'est pas significativement abordée. Quelques "grappilleurs" tentent, généralement en vain, de récupérer des points aux questions IV.1.a,b. Il est important de rappeler qu'un sujet de CAPES est volontairement conçu pour être trop long. Il s'agit tout simplement d'offrir la possibilité aux candidats de montrer qu'ils savent faire des choses. En aucun cas le fait d'aller ici ou là "grappiller" une question évidente dans un sujet ne constitue aux yeux du jury une façon honorable de montrer que l'on sait faire des choses. On attend d'un candidat qu'il sache se plonger dans la logique d'un énoncé.

Détails des erreurs fréquemment rencontrées. Nous détaillons une liste synthétique des erreurs les plus rencontrées dans les copies. Elles ne concernent, hélas, pas une minorité de candidats.

a) Méthodes de calcul d'intégrales. A la question I.1.a. un nombre non négligeable de candidat a tenté un changement de variables hasardeux du type $x = \sin t$ pour résoudre le problème. Ces changements de variables menaient à une intégrale impropre. Aucun d'eux ne pouvait marcher sans prendre de précautions, puisque les fonctions incriminées n'étaient pas C^1 sur l'intervalle considéré. Les autres candidats ont naturellement utilisé un changement de variables linéaire, mais beaucoup se sont trompés sur les formules de trigonométrie et la question du changement de bornes de l'intégrale.

La question I.1.c. demandait d'utiliser une intégration par partie. Très peu de candidats ont pris le soin de signaler que les fonctions utilisées étaient de classe C^1 et que l'on pouvait donc procéder ainsi. Le concours du CAPES est un concours de recrutement d'enseignants. On est en droit d'attendre que les candidats sachent faire preuve de pédagogie et qu'ils montrent leur maîtrise des théorèmes élémentaires, sachant surtout qu'ils seront potentiellement appelés à enseigner ces derniers.

b) Calcul d'équivalents. Très souvent dans les questions concernant des calculs d'équivalents de fonctions ou de suites, on constate que les candidats ne font pas forcément la différence entre équivalence et égalité. Beaucoup d'entre eux n'hésitent pas à passer de l'un à l'autre sans se poser de question, préférant l'égalité, sans doute plus commode pour effectuer des opérations algébriques. Par exemple, à la question I.2.c. environ une copie sur deux passe de $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}} \sim \dfrac{\pi\sqrt{2}}{K\sqrt{p}}$ à $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}} = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{K\sqrt{p}}$ pour calculer la valeur de K.

c) Passage à la limite. Plusieurs questions beaucoup abordées du sujet, nécessitaient des théorèmes de passage à la limite. Une quantité impressionnante de candidats pense que si une fonction est strictement positive et possède une limite en un point, alors cette dernière est elle-même strictement positive ! C'est le cas, par exemple, à la question I.2.b. où pour montrer le fait que $K > 0$, l'on rencontre très souvent l'argument que la suite $(u_n)_n$ est strictement positive. L'erreur est systématique à la question III.1.b. pour montrer la stricte monotonie de ζ.

d) Développements limités. A la question I.2.a. une proportion importante de candidats est incapable de donner un développement limité correct de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ au voisinage de 0. Très peu de candidats réalisent que pour obtenir le développement limité à l'ordre 2 de la suite $(v_n)_n$, il faut (à cause de la présence du n) pousser le développement limité de $\ln(1-1/n)$ à l'ordre 3.

e) Polynômes. Les candidats ne distinguent, bien sûr, pas la notion de polynômes et de fonctions polynômes. Aucun d'eux ne prend, par exemple, le soin de dire (et donc de justifier) que si une fonction polynôme est nulle sur un intervalle non ponctuel alors le polynôme associé est forcément nul.

f) Intégrales de fonctions positives. Dans les questions I.1.b. et II.3.a. on attendait des candidats qu'ils mentionnent que si une fonction continue et de signe constant est d'intégrale nulle sur un segment alors cette fonction est nulle sur ce segment. La quasi totalité des candidats oublie de parler de la continuité pour conclure. Certains mentionnent, sans aucune explication, que si une fonction est strictement positive sur un intervalle, son intégrale est aussi strictement positive. Ce résultat est vrai pour les fonctions Riemann-intégrables (puisque ces dernières sont presque partout continues), mais on est en droit d'attendre d'un candidat une explication, ne serait-ce que la phrase clé "la fonction est continue en un point où elle ne s'annule pas".

g) Aspects calculatoires. Les candidats semblent absolument rebutés par tout calcul numérique. Ils sont pourtant autorisés à utiliser de puissantes calculatrices. L'immense majorité d'entre eux saute systématiquement toute question calculatoire. Pour ceux qui acceptent de se plonger dedans, pratiquement aucun n'est capable de mener à bien les calculs. C'est le cas notamment pour la question I.3.i. qui ne présentait pourtant aucune difficulté.

h) Soin et rigueur. Peu de candidats arrivent à énoncer clairement les théorèmes qu'ils utilisent et à vérifier que les hypothèses sont bien satisfaites pour pouvoir appliquer le résultat mentionné à la question posée. De même, il semble qu'aucun soin particulier ne soit porté aux hypothèses même de l'énoncé. La manipulation des divers types de raisonnement (preuve par récurrence, contraposée, preuve par l'absurde) est mal maîtrisée et surtout ces raisonnements sont mal présentés. Trop souvent on retrouve dans les copies une volonté acharnée de vouloir conclure malgré d'évidentes abusrdités. Dans le même ordre d'idée, on constate de plus en plus une volonté de déguiser des faux raisonnements dans l'espoir que le correcteur passera sans remarquer. Faut-il rappeler que les copies sont lues plusieurs fois par deux correcteurs ? Les mathématiques sont une école de rigueur et d'honnêteté intellectuelle, cette donnée entre évidemment dans la notation. Il est important de rappeler aussi que si un membre du jury du capes a du mal à suivre et à comprendre le raisonnement d'un candidat, il y a peu de chance qu'un élève du secondaire y arrive. Puisqu'il s'agit d'un concours de recrutement d'enseignants, ces points concernant le soin et la rigueur ont été légitimement discriminatoires lors de la correction.

2.4 Enoncé de la seconde épreuve

Notations et présentation du sujet

Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul. Si a et b sont deux entiers naturels tels que $a < b$ on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $a \leqslant k \leqslant b$.

Si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour un polynôme $P(X) \in K[X]$ on notera P la fonction polynôme associée à $P(X)$. On note $P'(X)$ le polynôme dérivé de $P(X)$.

Enfin, le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct d'origine O.

Ce sujet traite de quelques aspects géométriques liés aux racines de polynômes. Il se compose de quatre parties. Les parties A et B sont destinées à donner des majorations des modules des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients. Dans les parties suivantes, on s'intéresse à localiser les racines du polynôme dérivé par rapport aux racines du polynôme. Dans la partie C on établit à ce sujet un théorème de Lucas et dans la partie D on démontre un raffinement de ce théorème pour des polynômes de degré 3.

Partie A : une majoration des modules des racines d'un polynôme

Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré n. On se propose de montrer que les racines de $P(X)$ appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon R où

$$R = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|, \cdots, 1 + |a_{n-1}|\}$$

1) **Exemple numérique**

On considère les nombres complexes $a_0 = 6 - 2i, a_1 = -3 - 5i, a_2 = -2 + 3i$, et on définit le polynôme $p(X) \in \mathbb{C}[X]$ par :

$$p(X) = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$$

1.1) Montrer que $p(X)$ possède une racine réelle.

1.2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 3iz - 3 + i = 0$

1.3) Vérifier que les racines de $p(X)$ appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon R où $R = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|\}$.

2) **Étude du cas général**

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$. On pose, pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$:

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{et} \qquad D_i = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant r_i\}$$

2.1) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et soit V un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. On pose $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ où $v_i \in \mathbb{C}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

2.1.a) Montrer que pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$|\lambda v_i| \leqslant r_i \max_{k \in [\![1,n]\!]} (|v_k|)$$

2.1.b) En déduire que : $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

2.2) Au polynôme $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$, est associée la matrice carrée d'ordre n notée M_P, appelée matrice compagnon de P, et définie par :

$$M_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

c'est à dire la matrice $M_P = (m_{ij})$ avec :

$$\begin{cases} m_{ij} = 1 \quad \text{si } i - j = 1 \\ m_{in} = -a_{i-1} \\ m_{ij} = 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

2.2.a) Montrer que pour tout nombre complexe z on a :

$$\det\big(M_P - zI_n\big) = (-1)^n P(z)$$

où I_n est la matrice identité d'ordre n.

2.2.b) En déduire que les racines de $P(X)$ appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon R où

$$R = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|, \cdots, 1 + |a_{n-1}|\}$$

PARTIE B : La borne de Cauchy

Dans cette partie on se propose de donner un autre encadrement des modules des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients.

1) **Un résultat préliminaire**

Soient $(c_i)_{i\in[\![0,n-1]\!]}$ des réels positifs non tous nuls. On considère le polynôme $H(X)$ défini par :

$$H(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k X^k$$

et on définit sur $]0, +\infty[$ la fonction h par :

$$h(x) = -\frac{H(x)}{x^n}$$

1.1) Montrer que la fonction h est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

1.2) En déduire que le polynôme $H(X)$ admet une unique racine réelle strictement positive qu'on note α et montrer que cette racine est une racine simple.

1.3) Soit ζ une racine complexe de $H(X)$. On suppose que $|\zeta| > \alpha$, montrer alors que :

$$|\zeta|^n > \sum_{k=0}^{n-1} c_k |\zeta|^k$$

1.4) En déduire que toutes les racines de $H(X)$ appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon α.

2) **Une application**

On considère un entier $m \geqslant 2$ et un polynôme $F(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k$ de degré $m-1$ tel que a_i soit un réel strictement positif pour tout $i \in [\![0, m-1]\!]$. On pose $\gamma = \displaystyle\max_{i\in[\![1,m-1]\!]} \left\{\frac{a_{i-1}}{a_i}\right\}$ et on considère une racine complexe ζ du polynôme $F(X)$.

2.1) En considérant le polynôme $F_\gamma(X) = (X-\gamma)F(X)$, montrer que

$$|\zeta| \leqslant \gamma$$

2.2) On pose $\gamma' = \min\limits_{i \in [\![1,m-1]\!]} \left\{ \dfrac{a_{i-1}}{a_i} \right\}$. Montrer que :

$$\gamma' \leqslant |\zeta|$$

3) **La borne de Cauchy**

Soit $f(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n tel que les $(a_i)_{i \in [\![0,n-1]\!]}$ soient non tous nuls.

3.1) Montrer que l'équation d'inconnue x

$$\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^k = |a_n| x^n$$

possède une unique solution réelle strictement positive.

Cette racine est appelée **borne de Cauchy** de $f(X)$ et sera notée dans la suite $\rho(f)$.

3.2) Montrer que pour toute racine complexe ζ de $f(X)$ on a :

$$|\zeta| \leqslant \rho(f)$$

3.3) Soit $(\zeta_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ les n racines complexes (distinctes ou non) de $f(X)$ avec

$$0 \leqslant |\zeta_1| \leqslant |\zeta_2| \leqslant \cdots \leqslant |\zeta_n| \leqslant \rho(f)$$

3.3.a) Montrer que pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$ on a :

$$\left| \frac{a_k}{a_n} \right| \leqslant \binom{n}{k} |\zeta_n|^{n-k}$$

où $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binômial : $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

3.3.b) En déduire que :

$$\rho(f)^n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \rho(f)^k |\zeta_n|^{n-k}$$

3.3.c) En déduire que :

$$\left(\sqrt[n]{2} - 1 \right) \rho(f) \leqslant |\zeta_n|$$

3.3.d) On suppose que 0 n'est pas racine de $f(X)$ et on pose $g(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^{n-k}$. On note $\rho(g)$ la borne de Cauchy de $g(X)$. Montrer que :

$$\frac{1}{\rho(g)} \leqslant |\zeta_1| \leqslant \frac{1}{\left(\sqrt[n]{2} - 1 \right) \rho(g)}$$

3.4) En reprenant le polynôme $p(X)$ de la question 1) de la partie A, déterminer à la calculatrice une valeur approchée de la borne de Cauchy de $p(X)$ et vérifier pour ce polynôme les résultats obtenus aux questions 3.2), et 3.3.c).

4) **Un raffinement de la borne de Cauchy**

On considère toujours $f(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n tel que les $(a_i)_{i \in [\![0,n-2]\!]}$ soient non tous nuls.

On pose
$$f_1(X) = a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-2} a_k X^k$$
On se propose de montrer que les racines de $f(X)$ appartiennent à $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1$ où $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ sont les disques définis par :
$$\mathcal{D}_0 = \{z \in \mathbb{C},\, |z| \leqslant \rho(f_1)\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}_1 = \left\{z \in \mathbb{C},\, \left|z + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \leqslant \rho(f_1)\right\}$$
et où $\rho(f_1)$ désigne la borne de Cauchy de $f_1(X)$.

4.1) Montrer que $\rho(f_1) \leqslant \rho(f)$.

4.2) Soit ζ une racine de f n'appartenant pas à $\mathcal{D}_0$. Montrer que :
$$|a_{n-1} + a_n\zeta| \leqslant \frac{1}{\rho(f_1)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} |a_k|\rho(f_1)^k = |a_n|\rho(f_1)$$

4.3) Conclure.

PARTIE C : un théorème de Lucas

On dit qu'une partie Γ du plan $\mathcal{P}$ est convexe si pour tout couple (A, B) de points de Γ, le segment $[AB]$ est contenu dans Γ : c'est à dire, en notant a et b les affixes respectives des points A et B, si pour tout $\lambda \in [0, 1]$, le point M_λ d'affixe $\lambda a + (1 - \lambda)b$ appartient à Γ. (*En particulier, l'ensemble vide est convexe*).

1) **Préliminaires**

1.1) Soit P une partie de $\mathcal{P}$ et E l'ensemble des parties de $\mathcal{P}$ qui sont convexes et qui contiennent P. On pose
$$\mathcal{E}(P) = \bigcap_{\Gamma \in E} \Gamma$$
Montrer que $\mathcal{E}(P)$ est la plus petite (au sens de l'inclusion) partie convexe contenant P. Cette partie $\mathcal{E}(P)$ est appelée **l'enveloppe convexe** de P.

1.2) Soit P une partie non vide de $\mathcal{P}$ et notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des barycentres de familles finies de points de P affectés de coefficients positifs. Montrer que $\mathcal{E}(P) = \mathcal{B}$.

2) Soit $f(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n et soit $f'(X)$ son polynôme dérivé. Soit $\{r_1, r_2, \cdots, r_m\}$ l'ensemble des racines de $f(X)$ et soit α_j l'ordre de multiplicité de la racine r_j pour tout $j \in [\![1, m]\!]$.

2.1) Montrer que pour tout nombre complexe z n'appartenant pas à $\{r_1, r_2, \cdots, r_m\}$, on a :
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{z - r_j}$$

2.2) Soit $r \in \mathbb{C}$ une racine de $f'(X)$ n'appartenant pas à $\{r_1, r_2, \cdots, r_m\}$. Montrer que :
$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{|r - r_j|^2}\,(r - r_j) = 0$$
et déduire que le point d'affixe r est barycentre des points M_1, M_2,$\cdots$,M_m d'affixes respectives r_1, r_2,$\cdots$, r_m.

2.3) Montrer alors que l'ensemble des points dont les affixes sont les racines de $f'(X)$ est inclus dans l'enveloppe convexe des points du plan dont les affixes sont les racines de $f(X)$. (*Théorème de Lucas*)

2.4) Illustrer ce résultat pour le polynôme $p(X)$ défini dans la question 1) de la partie A.

PARTIE D : théorème de Lucas et polynômes de degré 3

On se propose dans cette partie de démontrer un raffinement du théorème de Lucas pour des polynômes de degré 3. Plus précisément, on se propose de montrer le résultat suivant :

Soit $f(X) \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré 3. On note M_1, M_2 et M_3 les points du plan dont les affixes sont les racines de $f(X)$ et on suppose que M_1, M_2 et M_3 ne sont pas alignés. Alors les racines du polynôme dérivé $f'(X)$ sont les affixes :

- ◇ *des foyers de l'ellipse tangente aux trois côtés du triangle $M_1M_2M_3$ en leurs milieux si $M_1M_2M_3$ n'est pas équilatéral*
- ◇ *du centre du cercle inscrit dans le triangle $M_1M_2M_3$ s'il équilatéral.*

1) **Étude du cas où $M_1M_2M_3$ est un triangle équilatéral**

Soit $f(X) = (X - r_1)(X - r_2)(X - r_3) \in \mathbb{C}[X]$ où r_1, r_2 et r_3 sont trois nombres complexes distincts. On suppose que les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives r_1, r_2 et r_3 ne sont pas alignés.

1.1) Montrer que $f'(X)$ possède une racine double ω si et seulement si le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral et son centre de gravité a pour affixe ω.

1.2) Conclure.

2) **Une propriété de la tangente à l'ellipse**

Soit a un réel strictement positif et soient F et F' deux points distincts du plan tels que $FF' < 2a$. On appelle ellipse de foyers F et F' et de demi-axe focal a l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M du plan tels que :

$$MF + MF' = 2a$$

Soit $t \mapsto M(t)$ une paramétrisation de classe C^1 de l'ellipse. Pour tout point $M(t) \in (\mathcal{E})$, on note $\vec{\tau}(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{M(t)F}\right)$ un vecteur directeur de la tangente à $(\mathcal{E})$ en $M(t)$ et on pose

$$\vec{u}(t) = \frac{1}{M(t)F}\,\overrightarrow{M(t)F} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}(t) = \frac{1}{M(t)F'}\,\overrightarrow{M(t)F'}$$

2.1) Montrer que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{M(t)F}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{M(t)F'}\right)$$

2.2) Montrer que le produit scalaire $\Big(\vec{u}(t) + \vec{v}(t)\Big).\vec{\tau}(t)$ est nul.

2.3) En déduire que la tangente à $(\mathcal{E})$ en $M(t)$ est une bissectrice du couple de droites $((M(t)F), (M(t)F'))$.

3) **Un théorème de Poncelet**

Soit P un point strictement « extérieur » à l'ellipse $(\mathcal{E})$ (c'est à dire un point P tel que $PF + PF' > 2a$) : on admet qu'il existe toujours deux tangentes issues de P à $(\mathcal{E})$ et on note T_1 et T_2 les points de tangences.

3.1) Soit F_1 l'image de F par la réflexion d'axe (PT_1). Montrer que $F'F_1 = 2a$.

3.2) On note de même F_2 l'image de F par la réflexion d'axe (PT_2). Montrer que (PF') est la médiatrice de $[F_1F_2]$.

3.3) On se propose de montrer que les angles de droites $((PT_1), (PF))$ et $((PF'), (PT_2))$ sont égaux. Pour toute droite D du plan, on note $\mathcal{S}_D$ la réflexion d'axe D.

3.3.a) Déterminer $\mathcal{S}_{(PF)} \circ \mathcal{S}_{(PT_1)}(F_1)$ et en déduire la nature et les éléments caractéristiques de la composée $\mathcal{S}_{(PF)} \circ \mathcal{S}_{(PT_1)}$.

3.3.b) Déterminer de la même façon la nature et les éléments caractéristiques de la composée $\mathcal{S}_{(PT_2)} \circ \mathcal{S}_{(PF')}$ et conclure.

4) **Étude du cas où $M_1M_2M_3$ n'est pas équilatéral**

Soit $f(X) = (X - r_1)(X - r_2)(X - r_3) \in \mathbb{C}[X]$ où r_1, r_2 et r_3 sont trois nombres complexes distincts. On suppose que les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives r_1, r_2 et r_3 ne sont pas alignés et que le triangle $M_1M_2M_3$ n'est pas équilatéral.
On note w et w' (avec $w \neq w'$) les racines du polynôme dérivé $f'(X)$ et F et F' les points d'affixes respectives w et w'.

4.1) Justifier qu'il existe une ellipse $(\mathcal{E})$ de foyers F et F' et passant par le milieu de $[M_1M_2]$.

4.2)

4.2.a) Montrer que dans $\mathbb{C}[X]$ on a l'égalité :

$$3(X - w)(X - w') = (X - r_1)(X - r_2) + (X - r_2)(X - r_3) + (X - r_3)(X - r_1)$$

4.2.b) En déduire que :

$$12\,\frac{w - \dfrac{r_1 + r_2}{2}}{r_1 - r_2} = \frac{r_2 - r_1}{w' - \dfrac{r_1 + r_2}{2}}$$

puis que la droite (M_1M_2) est tangente à $(\mathcal{E})$.

4.3)

4.3.a) Montrer que :

$$\frac{r_2 - r_1}{w - r_1} = 3\,\frac{w' - r_1}{r_3 - r_1}$$

4.3.b) En déduire que (M_1M_3) est la deuxième tangente à $(\mathcal{E})$ issue de M_1.

4.4) Conclure.

FIN DE L'ÉPREUVE

2.5 Contenu du problème

Le problème s'intéressait à quelques aspects de ce qu'on appelle la « géométrie des polynômes ». Un des premiers résultats, déjà évoqué par Gauß(1777-1855), fut démontré par Édouard Lucas (1842-1891) en 1874 (partie C).

Le lecteur intéressé pourra consulter avec profit l'excellent livre de Morris Marden (1905- 1991) « Geometry of polynomials » qui fait un large tour d'horizon de ces problèmes. Certains problèmes ne sont pas encore résolus à ce jour.

2.6 Analyse des prestations

Quelques remarques générales

Même si la majorité des candidats fait un effort méritoire de présentation et de rédaction, il n'en reste pas moins que l'orthographe et la syntaxe présentes dans bon nombre de copies sont inquiétantes. On est en droit d'attendre d'un futur enseignant qu'il ne propose pas à ses élèves des « résonnements », que les accords des participes passés soient respectés et que tous les verbes (en particulier résoudre) ne soient pas du 1er groupe. Pour la partie mathématiques, beaucoup trop d'implications se transforment indument en équivalence, l'existence des quotients est rarement justifiée par des dénominateurs non nuls, l'utilisation des quantificateurs $\exists$ et $\forall$ n'est pas toujours maitrisée.

On ne peut enfin que conseiller aux candidats d'éviter tous les raisonnements approximatifs dans l'espoir d'arriver coûte que coûte au résultat demandé par l'énoncé : cette attitude consiste souvent à écrire n'importe quoi et est jugée sévèrement par les correcteurs.

Commentaire détaillé

Les candidats ont majoritairement abordé les parties A et B et le plus souvent de façon linéaire (attitude à encourager). La partie C et plus encore la partie D ont été abordées (sauf dans les très bonnes copies) très souvent par des candidats qui, en difficulté au début du sujet, ont cherché à « grapiller »quelques points sur des questions.

Partie A

1) Beaucoup de candidats appliquent au polynôme à coefficients complexes de l'énoncé des résultats portant sur des polynômes à coefficients réels : en particulier on trouve l'affirmation que tout polynôme de degré 3 admet au moins une racine réelle.

   Il est assez étonnant qu'un faible nombre de candidats sachent calculer les racines carrées d'un nombre complexe sous forme algébrique : la plupart des résultats sont obtenus à la calculatrice (autorisée dans cette épreuve) avec des rédactions faisant apparaître $\sqrt{3-4i}$.
2) La grande majorité des candidats oublie de préciser que si $|v_k| = max_i|v_i|$ alors $|v_k| \neq 0$ puisque v est un vecteur propre.

   Bien peu de candidats arrivent à proposer une démarche cohérente du calcul du déterminant et encore moins présentent un calcul rigoureux essentiellement par ignorance des manipulations élémentaires sur les lignes ou les colonnes qui permettent de simplifier le calcul de tels déterminants.

Partie B

1) Il semble acquis pour la majorité des candidats de parler de la fonction « $h(x)$ » et beaucoup dérivent h sans préciser que cette fonction est dérivable. Les calculs sont souvent maladroits (utilisation de la dérivée d'un quotient) et si la décroissance est obtenue, la stricte monotonie est souvent affirmée sans justification.

   Le théorème de bijection est trop souvent confondu avec le théorème des valeurs intermédiaires et dans les hypothèses, la continuité est en général oubliée.

2) Cette partie n'a été abordée que dans très peu de copies ; la question 2.2) n'a été traitée que dans les excellentes copies.
3) Si la question 3.1) a été correctement traitée, la difficulté de la question 3.2) n'a pas été comprise. Quelques candidats pensent à utiliser les classiques relations entre coefficients et racines. Les dernières questions de cette partie ont été bien traitées par les quelques candidats qui les ont abordées.

Partie C

Moins de la moitié des candidats abordent cette partie.

1) Cette question est la plus traitée mais on trouve peu de rédaction rigoureuse. On peut à la lecture des copies légitimement se demander si les candidats ont vu, au moins une fois dans leur cursus, le développement complet de ce genre de démonstration.
2) Dans la factorisation un grand nombre de candidats oublie a_n. La première partie de la question 2.2) est fausse dans la quasi totalité des copies, les candidats n'hésitant pas à affirmer implicitement que $(z - r_j)^2 = |z - r_j|^2$ pour obtenir le dénominateur voulu dans l'énoncé.

   Beaucoup de candidats parlent du barycentre d'un système de points pondérés sans en avoir justifier l'existence.

Partie D

Cette partie, bien peu abordée amène cependant des commentaires intéressants sur ce que les correcteurs y ont trouvé :

- ⋄ la caractérisation d'un triangle équilatéral dont les sommets ont pour affixe r_1, r_2 r_3 par la relation

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - r_1r_2 - r_2r_3 - r_3r_1 = (r_1 + jr_2 + j^2r_3)(r_1 + j^2r_2 + jr_3) = 0$$

  n'apparaît dans aucune copie ;
- ⋄ les candidats pensent que le vecteur dérivé d'un vecteur mobile (ici $\overrightarrow{MF}(t)$) est toujours orthogonal à ce denier ;
- ⋄ la nature de la composée de deux réflexions est méconnue de la majorité des candidats qui abordent ces questions ;
- ⋄ la traduction géométrique des égalités complexes pose problème à la majorité des candidats.

On ne peut que regretter, pour conclure, que les applications numériques soient rarement abordées et que bien peu d'illustrations graphiques soient proposées par les candidats.

3 SUJETS ET ANALYSE DES ÉPREUVES ORALES

3.1 Liste des exposés (première épreuve orale)

1. Utilisation d'arbres, de tableaux, de diagrammes pour des exemples de dénombrement. Dénombrement des arrangements et des permutations.
2. Exemples de problèmes dont la résolution fait appel à l'utilisation de graphes, orientés ou non.
3. Coefficients binomiaux, dénombrement des combinaisons, formule du binôme. Applications.
4. Description mathématique d'une expérience aléatoire : événements élémentaires, événements, probabilité (on se limitera au cas où l'ensemble d'événements élémentaires est fini).
5. Probabilité conditionnelle ; indépendance de deux événements (on se limitera au cas où l'ensemble d'épreuves est fini). Applications à des calculs de probabilité.
6. Variable aléatoire à valeurs réelles dont l'ensemble des valeurs est fini. Loi de probabilité. Espérance mathématique, variance. Exemples.
7. Schéma de Bernoulli et loi binomiale. Exemples.
8. Séries statistiques à deux variables numériques. Nuage de points associé. Ajustement affine par la méthode des moindres carrés. Droites de régression. Applications. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
9. Propriétés axiomatiques de $\mathbb{N}$. Construction de $\mathbb{Z}$.
10. Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$, unicité du quotient et du reste. Applications. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
11. PGCD de deux entiers naturels. Nombres premiers entre eux. Applications. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
12. Sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$. Égalité de Bézout. Résolution dans $\mathbb{Z}$ d'une équation de la forme $ax + by = c$.
13. Nombres premiers ; existence et unicité de la décomposition d'un nombre en facteurs premiers. Infinitude de l'ensemble des nombres premiers. Exemple(s) d'algorithme(s) de recherche de nombres premiers. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
14. Congruences dans $\mathbb{Z}$. Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
15. Construction du corps $\mathbb{Q}$ des rationnels. Propriétés.
16. Construction du corps $\mathbb{C}$ des complexes. Propriétés.
17. Module et argument d'un nombre complexe. Interprétation géométrique, lignes de niveau associées. Applications.
18. Interprétation géométrique des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par $z \mapsto z + b$, $z \mapsto az$ et $z \mapsto \overline{z}$, où a et b appartiennent à $\mathbb{C}$, a non nul. Exemples d'application à l'étude de configurations géométriques du plan.
19. Étude de la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f : z \mapsto \dfrac{z-a}{z-b}$, où a, b, z sont complexes. Lignes de niveau pour le module et l'argument de la fonction f. Applications.
20. Racines n-ièmes d'un nombre complexe. Interprétation géométrique. Applications.
21. Définition vectorielle d'une droite du plan, d'une droite et d'un plan de l'espace. Représentations paramétriques. Génération des demi-droites, des segments. Parallélisme.
22. Équation cartésienne d'une droite du plan. Problèmes d'intersection, parallélisme. Condition pour que trois droites soient concourantes.
23. Droites et plans dans l'espace. Positions relatives ; plans contenant une droite donnée.
24. Théorème de Thalès. Applications à la géométrie du plan et de l'espace.
25. Définition et propriétés du barycentre de n points pondérés. Application à l'étude de configurations du plan ou de l'espace.
26. Homothéties et translations ; transformation vectorielle associée. Effet sur l'alignement, les directions, les distances... Applications à l'action sur les configurations usuelles.

27. Composées d'homothéties et de translations du plan. Groupe des homothéties-translations. Applications.
28. Projection orthogonale sur une droite du plan, projection vectorielle associée. Applications (calculs de distances et d'angles, optimisation...).
29. Définition et propriétés du produit scalaire dans le plan ; expression dans une base orthonormale. Application au calcul de distances et d'angles.
30. Le cercle. Positions relatives d'une droite et d'un cercle, de deux cercles. Point de vue géométrique et point de vue analytique. Lien entre les deux points de vue.
31. Théorème de l'angle inscrit. Cocyclicité. Applications.
32. Relations métriques dans un triangle rectangle. Trigonométrie. Applications.
33. Relations métriques et trigonométriques dans un triangle quelconque. Applications.
34. Droites remarquables du triangle : bissectrices, hauteurs, médianes, médiatrices... (dans l'ordre que l'on voudra).
35. Produit vectoriel dans l'espace euclidien orienté de dimension trois. Point de vue géométrique, point de vue analytique. Applications.
36. Applications du produit scalaire et du produit vectoriel dans l'espace orienté : calculs de distances, d'aires, de volumes, d'angles...
37. Orthogonalité dans l'espace affine euclidien : droites orthogonales, droite orthogonale à un plan, plans perpendiculaires. Applications.
38. Réflexion du plan échangeant deux points donnés ; médiatrice, régionnement associé. Applications au triangle et au cercle (cercle circonscrit, angle inscrit...).
39. Réflexions du plan échangeant deux droites sécantes données, bissectrices. Applications au triangle et au cercle (cercle inscrit, tangentes à un cercle...).
40. Recherche des isométries du plan conservant un carré, un losange, un parallélogramme, un rectangle (dans l'ordre que l'on voudra).
41. Rotations planes. Notion d'angle. (On pourra traiter ces notions dans l'ordre que l'on voudra.)
42. Groupe des isométries du plan : décomposition d'une isométrie en produit de réflexions, groupe des déplacements, classification des isométries à partir de l'ensemble des points invariants.
43. Étude des transformations du plan euclidien qui conservent les rapports de distances.
44. Recherche des isométries du plan conservant un polygone régulier ; exemples (triangle équilatéral, carré, hexagone, octogone...).
45. Réflexion de l'espace échangeant deux points donnés ; plan médiateur, régionnement associé. Étude des isométries de l'espace ayant une droite de points invariants.
46. Réflexions et rotations de l'espace. Effet sur les distances, les angles... Applications à l'action sur les configurations usuelles.
47. Courbes définies par des équations paramétriques dans le plan. Vecteur dérivé et tangente ; interprétation cinématique.
48. Définitions de la parabole, géométriquement et par équation réduite ; équivalence entre ces définitions. Construction de la tangente et de la normale en un point.
49. Définitions de l'ellipse, géométriquement et par équation réduite ; équivalence entre ces définitions.
50. Définitions de l'hyperbole, géométriquement et par équation réduite ; équivalence entre ces définitions.
51. Exemples de représentation paramétrique des coniques ; constructions de la tangente et de la normale en un point à une parabole, une ellipse, une hyperbole.
52. Suites monotones, suites adjacentes. Approximation d'un nombre réel, développement décimal. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
53. Suites convergentes. Opérations algébriques, composition par une application continue. Limites et relation d'ordre.

54. Suites divergentes. Cas des suites admettant une limite infinie : comparaison, opérations algébriques, composition par une application.
55. Étude des suites de terme général a^n, n^b et $n!$ ($a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$). Croissances comparées. Exemples de comparaison de suites aux suites précédentes. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
56. Étude de suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et une condition initiale. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
57. Exemples d'étude de la rapidité de convergence d'une suite réelle $(u_n)_n$ vers une limite ℓ : Cas où $|u_n - \ell|$ est dominé par n^{-a}, par q^n... L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
58. Limite finie d'une fonction à valeurs réelles en un point a de $\mathbb{R}$. Opérations algébriques sur les limites. Continuité d'une fonction en un point. Exemples.
59. Limite à l'infini d'une fonction à valeurs réelles. Branches infinies de la courbe représentative d'une fonction. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
60. Image d'un intervalle par une fonction continue, cas d'un segment. Cas d'une fonction continue strictement monotone.
61. Dérivée en un point, meilleure approximation affine, interprétation géométrique. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
62. Fonctions dérivées. Opérations algébriques. Dérivée d'une fonction composée. Exemples.
63. Fonction réciproque d'une fonction strictement monotone sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Étude de la continuité, de la dérivabilité. Exemples.
64. Comparaison des fonctions : domination, prépondérance, équivalence. Exemples et applications.
65. Inégalité des accroissements finis. Exemples d'applications à l'étude de suites et de fonctions. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
66. Théorème de Rolle. Applications.
67. Formules de Taylor. Applications.
68. Développements limités, opérations sur les développements limités.
69. Fonctions polynômes.
70. Fonctions logarithmes.
71. Fonctions exponentielles.
72. Croissance comparée des fonctions réelles $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \mapsto x^a$ et $x \mapsto \ln(x)$ au voisinage de $+\infty$. Applications. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
73. Caractérisation des fonctions exponentielles réelles par l'équation fonctionnelle : $f(x+y) = f(x) \times f(y)$.
74. Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.
75. Applications de la dérivation à l'étude des extrémums éventuels d'une fonction numérique d'une variable réelle. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
76. Primitives d'une fonction continue sur un intervalle ; définition et propriétés de l'intégrale, inégalité de la moyenne. Applications.
77. Intégration par parties, par changement de variable. Exemples et applications.
78. Diverses méthodes de calcul approché d'intégrales définies. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
79. Méthodes d'approximation des zéros d'une fonction numérique réelle. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
80. Étude des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants. Exemples.
81. Exemples d'approximation d'une solution d'une équation différentielle par la méthode d'Euler. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

3.2 Liste des sujets de l'épreuve sur dossier (seconde épreuve orale)

date	thème	
27 juin 2009	Intégration	
28 juin 2009	Géométrie dans l'espace	
29 juin 2009	Outils	Les transformations
30 juin 2009	Arithmétique	
1er juillet 2009	Fonctions	Étude de représentations graphiques
2 juillet 2009	Probabilités	
3 juillet 2009	Géométrie	Problèmes sur les configurations
4 juillet 2009	Analyse	Équations différentielles
5 juillet 2009	Suites numériques	
9 juillet 2009	Fonctions usuelles	
10 juillet 2009	Probabilités	
11 juillet 2009	Arithmétique	
12 juillet 2009	Problèmes sur les configurations	
13 juillet 2009	Éude de suites	
14 juillet 2009	Nombres complexes	
15 juillet 2009	Intégration	
16 juillet 2009	Différents types de raisonnement	
17 juillet 2009	Géométrie dans l'espace	

3.3 Analyse des épreuves orales

Les épreuves orales ont été définies par un arrêté ministériel du 30 avril 1991 modifié par un arrêté du 3 août 1993. Les instructions les concernant ont été publiées dans le B.O. spécial n° 5 du 21 octobre 1993. Les objectifs communs aux deux épreuves orales sont précisés dans ces paragraphes, extraits des textes cités :

Les épreuves orales visent d'abord à évaluer la capacité à concevoir, mettre en forme et analyser une séquence d'enseignement sur un thème donné. A l'exception des quelques sujets d'exposé (première épreuve) où il est fait référence au programme complémentaire, il convient de se placer au niveau de l'enseignement secondaire, c'est-à-dire de ne pas dépasser le niveau du baccalauréat. Le candidat peut cependant être amené à faire appel aux connaissances acquises dans ses études supérieures pour analyser et commenter la démarche suivie, éclairer un point conceptuel ou technique et situer la question dans son contexte mathématique et scientifique. La mise en valeur de l'enchaînement des étapes du raisonnement constitue un objectif majeur. Les candidats ne doivent en aucun cas se borner à l'exposé, si parfait soit-il formellement, d'une liste de définition, de théorèmes, d'exemples et d'exercices : il est indispensable de dégager l'articulation mutuelle des divers éléments.

3.3.1 Commentaires sur la première épreuve

On rencontre de très belles prestations, mais aussi les plus mauvaises. Les conseils qui suivent se tiennent volontairement à l'écart d'une collection de « perles » ; leur étude doit permettre à tout candidat d'améliorer sa performance, et en même temps ses capacités à exercer le métier d'enseignant.

Modalités pratiques

Rappelons brièvement le déroulement de cette épreuve. Le candidat tire au sort une enveloppe contenant deux sujets. Il devra choisir l'un des deux sujets et disposera de deux heures pour sa préparation, sans document ; le candidat n'annoncera son choix que lors de sa parution devant le jury.

L'épreuve se déroule en deux phases : présentation de la leçon et questions du jury.

• La présentation de la leçon dure 25 minutes, sans interruption du jury. Cette première phase consiste à exposer un plan et à effectuer les démonstrations des propositions énoncées. Le plan doit être aussi riche que possible et peut contenir des exemples, contre-exemples et applications des outils introduits. Le candidat peut gérer son tableau à sa guise, néanmoins il serait bon de réserver une partie du tableau pour faire les démonstrations de manière à ce qu'à la fin l'ensemble du plan figure au tableau. Nous rappelons que cette partie ne fait pas un bon effet si elle se réduit à une recopie mot à mot des notes que l'on lit.

• La seconde phase, d'une durée de 20 minutes, est réservée aux questions du jury. Ces questions peuvent être de divers ordres :

• rectifier certaines erreurs ou préciser certains points obscurs dans le plan ou dans les démonstrations.

• vérifier la maîtrise et le recul du candidat sur le sujet traité. En particulier, le candidat est censé répondre sur tous les points présentés dans son plan ainsi qu'à toutes questions relatives au sujet, qu'il aurait omises volontairement ou non.

Remarques sur l'épreuve

D'une manière générale le jury souhaiterait encourager les futurs candidats à donner une touche personnelle à leurs plans, ceci ne peut se faire qu'au prix d'un travail régulier et approfondi durant l'année de préparation. Il n'est pas possible pendant les deux heures de préparation de monter une bonne leçon si le sujet n'a pas été travaillé pendant l'année de préparation au concours. Il est par ailleurs risqué de laisser de trop grandes brèches ou « impasses » ; on voit des candidats déstabilisés devant un choix comportant deux sujets fort classiques, ce qui indique a priori que des chapitres entiers ont été ignorés pendant l'année de préparation.

Sur le plan

Les plans doivent être structurés plus rigoureusement, en particulier :

• la chronologie est essentielle, elle montre la vue d'ensemble du candidat par rapport à son sujet et permet d'éviter les répétitions et les cercles vicieux.

• Le statut des énoncés est important et parfois joue un rôle important dans la qualité de la leçon : bien différencier une définition d'une proposition, un corollaire d'un théorème fondamental, etc. Par ailleurs il est important de savoir faire ressortir les points les plus importants, en les distinguant d'autres points secondaires. Pour illustrer cette idée, on peut exposer le cas d'une leçon abordant la convergence des suites de nombres réels : on peut annoncer la proposition « Une suite croissante de nombres réels est convergente si, et seulement si, elle est majorée » Mais la proposition « Toute suite convergente est majorée » est une conséquence élémentaire des définitions alors que la proposition « Toute suite de nombres réels croissante et majorée est convergente » qui repose sur le théorème de la borne supérieure (fondement des nombres réels) est bien plus profonde. Ainsi, du point de vue de la genèse des idées, le plan correspondant gagnera en clarté si ces deux énoncés sont présentés séparément et hiérarchiquement.

• Les définitions et les énoncés des propositions ou théorèmes doivent être écrits dans leur intégralité ; si le candidat n'écrit qu'une version abrégée, il doit s'attendre à ce que le jury lui demande une version détaillée et complète. Pour économiser du temps d'écriture, le candidat peut éventuellement utiliser des transparents.

Les plans peuvent être enrichis :

• en introduisant de nombreux exemples et contre-exemples bien choisis montrant pour les théorèmes à la fois, leur impact, la nécessité des hypothèses, les limites à leur application : un simple énoncé correct, c'est évidemment bien ; des développements tels que ceux qui viennent d'être décrits montrent que le candidat possède du recul, et une connaissance en profondeur du sujet traité.

• en donnant de nombreuses applications, y compris des applications transversales au sens où elles concernent, soit des domaines mathématiques différant du domaine usuel dans lequel s'inscrit le sujet, soit plus largement des domaines issus d'autres sciences, sciences physiques, astronomie, sciences naturelles, etc.

• en montrant des figures. En géométrie cela semble le plus naturel, mais un dessin peut se révéler très utile aussi dans les autres domaines, et particulièrement en analyse. Les figures géométriques peuvent être réalisées à main levée, ou aux instruments, ou encore préparées sur des transparents, ou enfin sur le logiciel de géométrie de la calculatrice. Il revient au candidat de choisir la méthode qui met le mieux en valeur son travail et ses compétences ; de belles figures réalisées à la main resteront appréciées pour leur élégance ; à l'opposé, des figures bien présentées à la calculatrice, éventuellement animées, témoigneront des capacités du candidat à utiliser les moyens mis à sa disposition, et à s'investir ultérieurement dans l'utilisation des TICE.

Le candidat choisit le niveau auquel il place son exposé. En conséquence :

• sa prestation lors de l'exposé doit rester cohérente avec le niveau qu'il a choisi.

• s'il aborde les diverses notions de manière trop élevée sur le plan « théorique », le jury cherchera à vérifier la solidité de l'exposé au niveau correspondant, et il essayera de faire revenir le candidat aux aspects plus concrets et aux applications plus simples.

• s'il aborde le sujet à un niveau trop faible, le jury ne se satisfera pas de devoir rester à ce niveau, ce qui amène parfois certains (surtout s'ils écoutent mal les questions par la suite) à quitter le jury inconscients de leur médiocre performance.

Sur les démonstrations

ll arrive trop souvent que des candidats présentent un plan sans aucune démonstration. Cette manière de préparer l'épreuve est à proscrire. Rappelons que le candidat est jugé sur le contenu de son plan mais aussi sur sa prestation notamment au cours des démonstrations qui sont faites, en particulier la pertinence du choix des points démontrés par rapport au sujet et la consistance de ceux-ci sont un élément important d'appréciation. Cette exigence renforce la nécessité, pour le candidat, de disposer d'un minimum de recul par rapport aux connaissances présentées, recul nécessaire pour l'aider à trouver quels sont véritablement les « points forts » de son exposé.

D'une manière générale, il est conseillé :

• De choisir le développement d'un ou de plusieurs points consistants, centraux par rapport au sujet, permettant de montrer son aptitude à raisonner sur les notions étudiées.

• De montrer ses qualités pédagogiques en s'efforçant de donner la présentation la plus naturelle possible (l'utilisation de figures est recommandée chaque fois que cela est possible), faisant ressortir clairement la démarche scientifique utilisée et en mettant bien en relief les points cruciaux des différentes preuves ; beaucoup de candidats se contentent d'aligner une suite de raisonnements, présentés artificiellement, sans être capable d'expliquer l'origine de leurs motivations.

• De bien vérifier l'absence de lacune dans l'enchaînement logique de la démonstration ; il arrive souvent qu'un candidat se trouve complètement désarçonné lorsqu'on lui demande d'éclaircir certains passages, ce qui lui fait découvrir des difficultés qui lui avaient échappé.

Sur les questions du jury

Les questions du jury peuvent porter aussi bien sur la conception, l'organisation du plan, que sur les démonstrations, abordées ou non, au cours de l'exposé. Elles peuvent également porter sur les pré-requis ou concerner certains prolongements omis, soit pour s'assurer de la solidité des connaissances, soit pour compléter un plan trop pauvre.

Nous insistons sur le fait qu'il est essentiel que les candidats aient un certain recul sur les notions qu'ils devront enseigner et ne peuvent donc en aucun cas se contenter de ne connaître que ce qui est exigible pour un élève du secondaire actuel. Par exemple, s'il est normal d'admettre lors d'un exposé le théorème « Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle », il est insuffisant de la part du titulaire d'une licence qu'il n'ait pas la moindre idée sur les propriétés permettant ce résultat. De même, si la définition rigoureuse des angles est hors de portée d'un élève, il n'est pas acceptable qu'un futur enseignant n'y ait jamais réfléchi au point d'être incapable de fournir la moindre piste pour attaquer ce délicat problème, ou plus grave, ne pas sembler comprendre l'importance de la question qui se pose.

L'entretien commence le plus souvent par la mise au point et la correction d'erreurs de détail, notamment de lapsus ou d'erreurs bénignes, de confusions de notation, etc. Le candidat ne doit pas penser que ces questions constituent des pièges. Dans la suite de l'entretien, il est important d'écouter réellement les questions : d'une part, une question mal écoutée et à laquelle on répond de manière précipitée risque de se conclure par des réponses inadaptées, et une situation défavorable au candidat ; d'autre part, on attend du futur professeur qu'il écoute et analyse les questions de ses futurs élèves, et pour cela, il lui faudra aussi « savoir écouter ».

Les questions ne sont pas de niveau constant : le jury peut souhaiter, par des questions très élémentaires, mettre le candidat en confiance ; par des questions plus profondes, il peut souhaiter donner au candidat la possibilité de montrer qu'il dispose de recul par rapport au sujet traité. Une erreur, une réponse erronée n'est pas nécessairement catastrophique : si le candidat, alerté par d'autres questions du jury, s'aperçoit de son erreur et est capable de la corriger, il laissera l'impression positive d'un futur enseignant capable de réagir valablement lorsqu'il est en difficulté.

3.3.2 Commentaires sur la seconde épreuve

L'exposé du candidat

Jouer la montre lors de l'exposé n'est pas pertinent ; le jury reporte le temps non utilisé pour l'exposé sur la seconde partie de l'épreuve, et si le candidat remplit son temps d'exposé en résolvant en détail un exercice — celui proposé par le jury ou un autre — le jury ne peut intervenir pendant cette résolution. Faire un exposé plus court que les 25 minutes maximales autorisées n'est pas considéré comme une faute. Remplir les 25 minutes en traitant des points non demandés expose le candidat au risque d'être interrogé de manière plus exigeante et plus rapide puisque le jury aura moins de temps pour l'entretien. Bien entendu, un exposé de qualité long de 25 minutes est parfaitement pris en compte et joue en faveur du candidat lorsqu'il est conforme à la définition de l'épreuve.

Interprétation du thème par les candidats, « hors-sujet »

On rappelle que l'énoncé du thème est à prendre au sens littéral de la cartouche figurant en tête du dossier. Trop de candidats, par frilosité, n'ont pas osé s'éloigner de l'exercice proposé par le jury alors même que celui-ci ne couvrait qu'une faible partie du thème. Ils se contentaient de proposer parfois de simples démarquages de l'exercice proposé par le jury.

Il a aussi été noté que trop de candidats n'osaient pas varier le niveau des exercices qu'ils proposent. Certains dossiers suggèrent fortement cette ouverture, notamment par le moyen des extraits de programmes qui y sont attachés.

Équilibre des différents éléments de l'épreuve

La présidence du concours était très attentive à ne pas laisser le travail sur l'exercice proposé par le jury envahir l'ensemble de cette épreuve. Dans cet esprit, des instructions ont été données aux commissions de sorte qu'elle répartissent convenablement le temps d'entretien entre, d'une part, les questions relatives à l'exercice du jury, résolution éventuellement comprise, et d'autre part l'étude des exercices présentés par le candidat. Des instructions cohérentes étaient données aux candidats : chaque vague est reçue séparément et reçoit une série de conseils pour préparer et passer l'épreuve dans les meilleures conditions. Parmi ces conseils figurait l'avertissement disant que le travail sur l'exercice proposé par le jury ne constituait qu'une partie de l'épreuve, et que par conséquent ils doivent penser à partager leur temps de préparation de manière adaptée à l'importance de chaque point à traiter. Cette consigne de travail s'est heurtée au fait qu'une partie des candidats arrivait devant les commissions en ayant trop peu travaillé sur leurs propres exercices. Aussi dans certains cas, l'interrogation sur les exercices proposés par les candidats se trouvait-elle quelque peu limitée. Nous avons renforcé cette demande d'équilibrage de l'épreuve en allégeant dans la mesure du possible le travail de rédaction demandé sur l'exercice proposé par le jury. L'importance des exercices proposés par les candidats se trouve ainsi très clairement réaffirmée.

présentation du sujet

Pour éviter toute ambiguité et à la demande de plusieurs membres du jury, lors de la session 2009, on a retiré les questions Q_i présentes dans les textes lors des sessions précédentes. On précise maintenant de manière explicite ce que le candidat aura à rédiger sur ses fiches et ce qu'il aura à présenter devant le jury.

3.3.3 Les dossiers de la 2^{de} épreuve orale

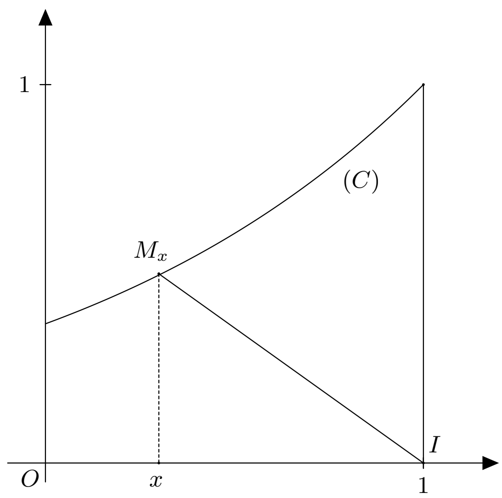
Ci-dessous sont présentés les dossiers dans l'ordre de leur parution. On n'a pas jugé utile de donner ici les annexes des dossiers, c'est-à-dire les extraits de programmes qui les accompagnent.

Dossier du 27 juin 2009

Thème : Intégration

1. L'exercice proposé au candidat

Soit f une fonction dérivable, strictement positive et strictement croissante sur $[0,1]$ et (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine O. On note I le point de coordonnées $(1,0)$ et on note Δ la portion du plan comprise entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$. Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'un unique réel α appartenant à l'intervalle $[0,1]$ tel que, si A est le point de (C) d'abscisse α, le segment $[IA]$ partage Δ en deux parties de même aire.



Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0,1]$, on note M_x le point de coordonnées $\big(x, f(x)\big)$. On désigne par g la fonction qui à tout réel $x \in [0,1]$ associe l'aire du domaine limité par la droite (IM_x), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe (C).

1) Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0,1]$, exprimer $g(x)$ en fonction de x.

2) Étudier les variations de la fonction g sur $[0,1]$.

3) a) Par des considérations d'aires, montrer que $g(0) < \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [0,1]$ tel que $g(\alpha)$ soit égal à la moitié de l'aire de Δ.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

◇ sa réponse à la question 3) de l'exercice ;

◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Intégration** ».

Le candidat présentera au jury :

– le contenu de ses fiches ;

– les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

Dossier du 28 juin 2009

Thème : Géométrie dans l'espace

1. L'exercice proposé au candidat

L'espace est rapporté à une repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1) Déterminer une équation du plan (P) passant par le point $A(1, 0, 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

2) Soit (P') le plan d'équation $x + 2y - z + 1 = 0$ et M le point de coordonnées $(0, 1, 1)$.
   a) Montrer que (P) et (P') sont perpendiculaires.
   b) Calculer les distances d et d' du point M respectivement aux plans (P) et (P').

3) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (D), intersection des plans (P) et (P').
   b) Déterminer les coordonnées du point H de (D) tel que la droite (MH) soit perpendiculaire à (D).
   c) Vérifier que $MH^2 = d^2 + d'^2$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

◇ sa réponse aux questions 3)a) et 3)b) ;

◇ deux exercices se rapportant au thème « **Géométrie dans l'espace** » dont un au moins ne fait pas appel à la géométrie analytique.

Le candidat présentera au jury :

– le contenu de ses fiches ;

– les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

Dossier du 29 juin 2009

Thème : Outils
Les transformations

1. L'exercice proposé au candidat

On considère dans le plan trois droites parallèles et distinctes (D_1), (D_2) et (D_3). Une droite (Δ) coupe (D_1), (D_2) et (D_3) respectivement en A, B et C. Soit N un point de (D_2) distinct de B. La parallèle à (NC) passant par B coupe (D_1) en M. La parallèle à (NA) passant par B coupe (D_3) en P.

1) Soit h l'homothétie de centre A qui transforme B en C. Construire les points M' et N' images respectives de M et N par l'homothétie h.
2) En déduire les images de M et N par la transformation $f = t_{\overrightarrow{NB}} \circ h$.
3) Montrer que les points M, N et P sont alignés.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question 1) de l'exercice ;
- ◇ un ou plusieurs exercices utilisant les transformations comme outil.

Le candidat présentera au jury :

- les méthodes et les savoir-faire mis en jeu ainsi que les objectifs d'apprentissage visés dans cet exercice ;
- le contenu de ses fiches.

Dossier du 30 juin 2009

Thème : Arithmétique

1. L'exercice proposé au candidat

Les nombres 1, 11, 111, 1111, etc. sont des nombres que l'on appelle *rep-units* (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés qui passionnent les mathématiciens. Cet exercice propose d'en découvrir quelques-unes.

Pour tout entier k strictement positif, on note N_k le rep-unit qui s'écrit avec k chiffres 1.

1) Citer, en justifiant la réponse, deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit en produit de facteurs premiers.
2) À quelle condition sur k, le nombre 3 apparaît-il dans la décomposition en produit de facteurs premiers du rep-unit N_k ?
3) Pour tout entier k strictement positif, on a :

$$N_k = \sum_{i=0}^{i=k-1} 10^i = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{k-1}.$$

   Justifier l'égalité : $9N_k = 10^k - 1$.

4) a) Soit k un entier strictement positif, montrer que $10^k \equiv 1 \pmod 7$ si et seulement si k est multiple de 6.
   b) En déduire que 7 divise N_k si et seulement si k est multiple de 6.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question 4) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Arithmétique** ».

Le candidat présentera au jury :

- ◇ le contenu de ses fiches ;
- ◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

Dossier du 1$^{\text{er}}$ juillet 2009

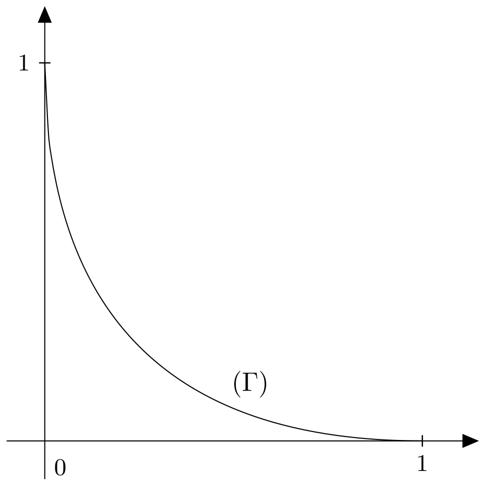
Thème : Fonctions
Étude de représentations graphiques

1. L'exercice proposé au candidat

On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par :

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1.$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine O, la courbe (Γ) représentative de f est donnée ci-dessous.



1) a) Montrer que le point M de coordonnées (x, y) appartient à (Γ) si et seulement si $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

   b) Montrer que (Γ) est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

2) La courbe (Γ) est-elle un arc de cercle ? Justifier.

2. Le travail demandé au candidat

> En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
> Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

◇ sa réponse à la question 2) ;

◇ un ou plusieurs exercices faisant appel à l'étude ou à l'utilisation de représentations graphiques de fonctions.

Le candidat présentera au jury :

– le contenu de ses fiches ;

– les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

Dossier du 2 juillet 2009

Thème : Probabilités

1. L'exercice proposé au candidat

Au cours d'une journée, un commercial se déplace pour visiter deux de ses clients afin de leur proposer l'achat d'un produit de grande consommation d'une valeur de 500 €.

Au vu de son expérience, le commercial estime que :

- la probabilité que le premier client visité achète le produit est égal à 0,25 ;
- si le premier client achète le produit, la probabilité que le second client visité achète le produit est égale à 0,4 ;
- si le premier client n'achète pas le produit, la probabilité que le second client visité achète le produit est égale à 0,25 ;

1) On note A l'événement « le premier client achète le produit » et B l'événement « le second client achète le produit ». Calculer la probabilité de l'événement B.
2) Quelle est la probabilité qu'un seul des clients conclue l'achat ?
3) Le commercial perçoit 15% sur le total de sa vente.
   a) Établir la loi de probabilité associée au gain de la journée.
   b) Quelle est l'espérance mathématique du gain ?
4) Quel doit être le pourcentage minimum de sa commission pour que cette espérance dépasse 60 € ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

◇ sa réponse à la question 3) ;

◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Probabilités** ».

Le candidat présentera au jury :

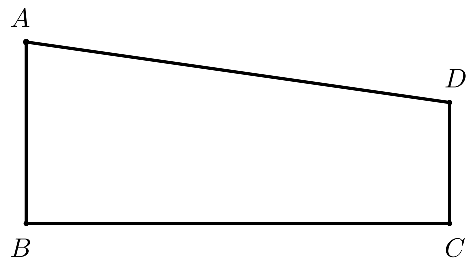
- le contenu de ses fiches ;
- les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

Dossier du 3 juillet 2009

Thème : Géométrie
Problèmes sur les configurations

1. L'exercice proposé au candidat

Dans le plan, on considère le trapèze $ABCD$, de bases $[AB]$ et $[CD]$, rectangle en B. On donne $AB = 3$, $BC = 7$ et $CD = 2$.



1) Justifier l'existence et l'unicité d'un point M de la droite (BC) tel que $AM = DM$. Construire ce point à la règle et au compas.
2) Existe-t-il des points M de la droite (BC) tels que (AM) et (DM) soient perpendiculaires ? Si oui, construire ce ou ces point(s) à la règle et au compas.
3) On note f la fonction qui à tout point M du segment $[BC]$ associe $AM+DM$. Cette fonction admet-elle un minimum ? (*On pourra utiliser une transformation géométrique ou se placer dans un repère.*)

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question 3) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Problèmes sur les configurations** ».

Le candidat présentera au jury :

- une animation, à l'aide du module de géométrie de la calculatrice, permettant de conjecturer la réponse à la question 3) ;
- le contenu de ses fiches.

Dossier du 4 juillet 2009

Thème : Analyse
Équations différentielles

1. L'exercice proposé au candidat

Dans cet exercice on se propose de rechercher, s'il en existe, des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition :

$$(C)\ :\ \begin{cases} \text{pour tout réel } x,\ f(-x)f'(x) = 1 \\ f(0) = -4 \end{cases}$$

1) Dans cette question, on suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C). On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(-x)f(x).$$

   a) Démontrer que la fonction g est constante et déterminer sa valeur.

   b) Montrer alors que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ \begin{cases} y' = \dfrac{1}{16}y \\ y(0) = -4 \end{cases}$$

2) En déduire les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition (C).

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

◇ sa solution de la question 2) ;

◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Équations différentielles** ».

Le candidat présentera au jury :

– le contenu de ses fiches ;

– les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

Dossier du 5 juillet 2009

Thème : Suites numériques

1. L'exercice proposé au candidat

On considère une suite numérique (u_n) positive et la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier dans chaque cas.

1) La suite (v_n) est bornée.
2) Si la suite (u_n) est croissante, alors la suite (v_n) est croissante.
3) Si la suite (u_n) est convergente, alors la suite (v_n) est convergente.
4) Si la suite (v_n) est convergente, alors la suite (u_n) est convergente.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse aux questions 3) et 4) de l'exercice ;
- ◇ deux exercices sur le thème « **Suites numériques** ».

Le candidat présentera au jury :

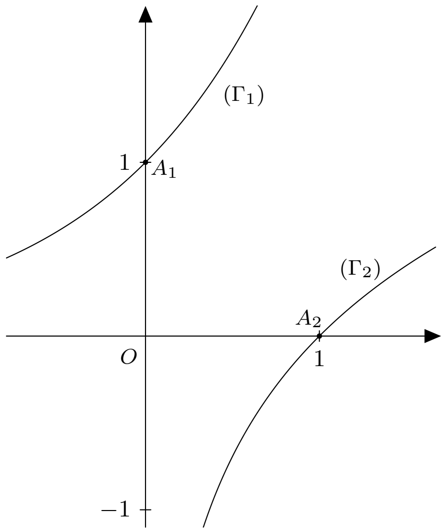
- le contenu de ses fiches ;
- les connaissances et savoir-faire mis en jeu ainsi que les objectifs d'apprentissage visés dans cet exercice.

Dossier du 9 juillet 2009

Thème : Fonctions usuelles

1. L'exercice proposé au candidat

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine O, on note respectivement (Γ_1) et (Γ_2) les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien. Soit A_1 le point de (Γ_1) d'abscisse 0 et A_2 le point de (Γ_2) d'abscisse 1.



1) a) Donner une équation de la tangente (Δ_1) à la courbe (Γ_1) au point A_1 et une équation de la tangente (Δ_2) à la courbe (Γ_2) au point A_2.
   b) Montrer que les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont parallèles et calculer la distance de (Δ_1) à (Δ_2).

2) a) Déterminer la position relative de (Γ_1) par rapport à (Δ_1) et la position relative de (Γ_2) par rapport à (Δ_2).
   b) Lorsque le point M_1 parcourt la courbe (Γ_1) et lorsque le point M_2 parcourt la courbe (Γ_2), quelle est la valeur minimale de la distance M_1M_2 ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

◇ sa réponse à la question 2) ;

◇ un ou plusieurs exercices dans lesquels interviennent des représentations graphiques de fonctions usuelles.

Le candidat présentera au jury :

– le contenu de ses fiches ;

– les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

Dossier du 10 juillet 2009

Thème : Probabilités

1. L'exercice proposé au candidat

Un quincaillier achète des ampoules à trois fournisseurs dans les proportions suivantes : 20% au premier fournisseur, 50% au deuxième fournisseur et 30% au troisième fournisseur.

Le premier fournisseur fabrique 97% d'ampoules sans défaut, le deuxième fournisseur fabrique 98% d'ampoules sans défaut, le troisième fournisseur fabrique 95% d'ampoules sans défaut.

1) On choisit une ampoule au hasard dans le stock. On note D l'événement « l'ampoule est défectueuse », F_1 l'événement « l'ampoule vient du premier fournisseur », F_2 l'événement « l'ampoule vient du deuxième fournisseur » et F_3 l'événement « l'ampoule vient du troisième fournisseur ».
   Calculer la probabilité de l'événement D, notée $P(D)$.
2) On admet que la probabilité qu'une ampoule soit sans défaut est de 0,969. On monte 12 ampoules sur un lustre. Calculer la probabilité qu'une ampoule au plus soit défectueuse.
3) La durée de vie d'une ampoule, notée T, suit une loi de durée de vie sans vieillissement (ou loi exponentielle) de paramètre $\lambda = 2 \cdot 10^{-5}$. Selon cette loi, pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a $P(T \leqslant x) = \displaystyle\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.
   Quelle est la probabilité qu'une ampoule dure plus de 50 000 heures sachant qu'elle a déjà duré 25 000 heures ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question 3) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices sur le thème « **Probabilités** » dont un au moins se rapportant aux probabilités conditionnelles.

Le candidat présentera au jury :

- le contenu de ses fiches ;
- les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

Dossier du 11 juillet 2009

Thème : Arithmétique

1. L'exercice proposé au candidat

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, **en justifiant le choix effectué**.

1) Si un entier est divisible par 4, alors il est divisible par 8.
2) Si un entier est divisible par 4 et par 5, alors il est divisible par 20.
3) Si un entier est divisible par 4 et par 6, alors il est divisible par 24.
4) Si deux entiers naturels a et b $(a > b)$ sont premiers entre eux, alors le PGCD de $a + b$ et $a - b$ est égal à 1 ou à 2.
5) Si deux entiers naturels a et b sont premiers entre eux, alors les entiers a^2 et b^2 sont premiers entre eux.

2. Le travail demandé au candidat

> En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
> Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question 4) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Arithmétique** » dont un au moins faisant appel à la notion de congruence.

Le candidat présentera au jury :

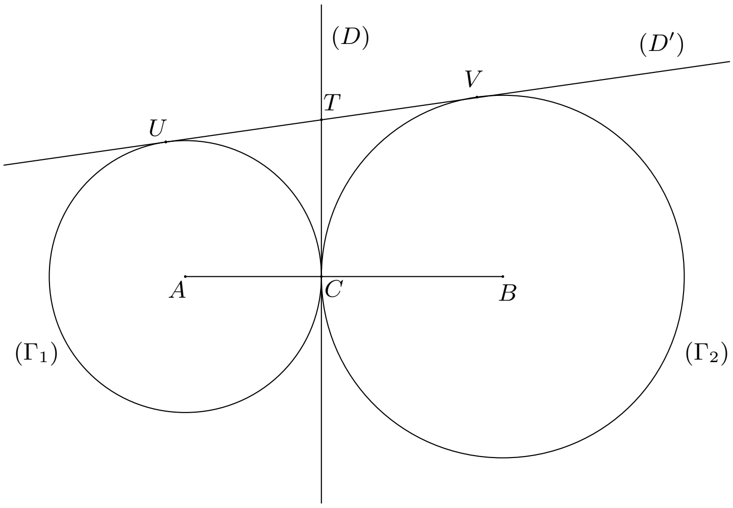
- le contenu de ses fiches ;
- les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

Dossier du 12 juillet 2009

Thème : Problèmes sur les configurations

1. L'exercice proposé au candidat

On considère deux cercles (Γ_1) et (Γ_2) de centres respectifs A et B et tangents extérieurement en C. La droite (D) est la tangente commune à (Γ_1) et (Γ_2) en C et la droite (D') est tangente à (Γ_1) en U $(U \neq C)$ et à (Γ_2) en V. Les deux droites (D) et (D') se coupent en T.



1) Montrer que le triangle UCV est rectangle en C.
2) Montrer que le triangle ATB est rectangle en T.
3) On donne deux cercles tangents extérieurement en un point C. En vous aidant des questions précédentes, donner une construction à la règle et au compas d'une droite tangente à ces deux cercles et ne passant pas par C.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ⋄ sa réponse à la question 3) ;
- ⋄ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Problèmes sur les configurations** » dont l'un au moins utilisera le module de géométrie dynamique de la calculatrice.

Le candidat présentera au jury :

- le contenu de ses fiches ;
- les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

Dossier du 13 juillet 2009

Thème : Éude de suites

1. L'exercice proposé au candidat

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\times\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{n}{n^2}\right).$$

On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = \ln(u_n)$.

1) Montrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$, on a :

$$x-\frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x\,.$$

2) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \leqslant n^3\,.$$

3) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge.
4) Est-ce que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question 3) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices sur les suites dont un au moins fera intervenir une illustration graphique.

Le candidat présentera au jury :

- le contenu de ses fiches ;
- les méthodes et les savoirs mis en jeu ainsi que les objectifs d'apprentissage visés dans cet exercice.

Dossier du 14 juillet 2009

Thème : Nombres complexes

1. L'exercice proposé au candidat

On considère l'application f qui à tout nombre complexe z associe le nombre complexe $f(z)$ défini par :

$$f(z) = \mathrm{e}^{y}\big(\cos(\pi x) + i\sin(\pi x)\big).$$

où x et y désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de z.

1) Placer dans le plan muni d'un repère orthonormal les points d'affixes $f(i)$, $f(1+i)$ et $f(1-i)$.
2) Démontrer que pour tout couple $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$f(z+z') = f(z)f(z') \quad \text{et} \quad f(nz) = \big(f(z)\big)^n.$$

3) Démontrer que, pour tout nombre complexe z, le nombre complexe $f(z)$ est non nul puis déterminer le module et un argument de $f(z)$.
4) Construire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan dont l'affixe $z = x + iy$ vérifie les conditions $|x| \leqslant 1$ et $|y| = 1$. Déterminer et construire l'ensemble des points d'affixe $f(z)$ quand le point M d'affixe z parcourt l'ensemble $\mathcal{E}$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question 4) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices sur le thème « **Nombres complexes** ».

Le candidat présentera au jury :

- le contenu de ses fiches ;
- les méthodes et les savoirs mis en jeu ainsi que les objectifs d'apprentissage visés dans cet exercice.

Dossier du 15 juillet 2009

Thème : Intégration

1. L'exercice proposé au candidat

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{1-x}.$$

1) Donner le tableau de variation de f et tracer l'allure de sa représentation graphique dans un repère orthonormal.
2) On considère la fonction F définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   a) Démontrer que pour tout réel t positif, on a : $2\sqrt{2}\sqrt{t} \leqslant t + 2$.
   b) En déduire que pour tout réel x appartenant à $[1, +\infty[$ on a :

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(4 - (x+3)\,\mathrm{e}^{1-x}\right).$$

   c) En déduire que pour tout réel x appartenant à $[1, +\infty[$ on a : $0 \leqslant F(x) \leqslant \sqrt{2}$.
3) La fonction F admet-elle une limite en $+\infty$?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

◇ sa réponse à la question 2)b) ;

◇ un ou plusieurs exercices sur le thème « **Intégration** ».

Le candidat présentera au jury :

– le contenu de ses fiches ;
– les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

Dossier du 16 juillet 2009

Thème : Différents types de raisonnement

1. L'exercice proposé au candidat

Les propositions suivantes sont indépendantes. Pour chacune d'elles, préciser si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1) Pour tout entier naturel n, l'entier $n^2 + n + 41$ est un nombre premier.
2) Pour tout entier n, le nombre $n(n + 1)(2n + 1)$ est divisible par 3.
3) Toute suite strictement croissante tend vers $+\infty$.
4) Le nombre $\sqrt{2}$ est rationnel.
5) Les deux bouts d'une corde non élastique de 101 mètres sont fixés au sol au moyen de deux piquets distants de 100 mètres. On tend la corde en la tirant verticalement par son milieu aussi haut que possible. Une personne mesurant 1,68 m peut alors passer sous la corde sans se baisser.

.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question concernant les propositions 2) et 4) ;
- ◇ plusieurs exercices mettant en jeu différents types de raisonnement dont un au moins ne fait pas appel à la géométrie.

Le candidat présentera au jury :

- le contenu de ses fiches ;
- l'énoncé détaillé d'un exercice permettant de traiter le cas de la proposition 4) ;
- les différents types de raisonnement mis en œuvre dans l'exercice.

Dossier du 17 juillet 2009

Thème : Géométrie dans l'espace

1. L'exercice proposé au candidat

L'espace est rapporté à une repère orthonormal d'origine O.
On considère les points A, B, C et S de coordonnées respectives :

$$A(-1, 0, 1) \qquad B(1, 4, -1) \qquad C(3, -4, -3) \qquad S(4, 0, 4).$$

1) Démontrer que le triangle ABC est un triangle rectangle en A.
2) a) Démontrer que O est le barycentre des points A, B et C affectés de coefficients que l'on déterminera.
   b) En déduire que O est situé à l'intérieur du triangle ABC.
3) a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{SO}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
4) Calculer le volume du tétraèdre $SABC$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa solution de la question 2) ;
- ◇ deux exercices se rapportant au thème « **Géométrie dans l'espace** » dont un au moins fait appel à la notion de barycentre.

Le candidat présentera au jury :

- le contenu de ses fiches ;
- les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

4 CONCLUSION

Le travail d'un jury de concours tel que celui-ci a des répercussions importantes et durables si l'on considère qu'il s'agit de recruter les futurs enseignants de collège et de lycée. À côté d'autres voies d'accès adaptées aux personnels déjà en situation d'enseignant, mais d'importance numérique moindre, le concours externe « donne le ton » pour les jeunes étudiants en ce qui concerne les exigences attendues en matière de recrutement.

La situation actuelle permet tout à la fois de maintenir un niveau d'exigence raisonnable et de pourvoir tous les postes. En ce sens elle est tout à fait satisfaisante.

L'introduction des TICE dans un concours de cette taille se heurte à de nombreux obstacles, qui n'ont pas permis la mise en œuvre d'une épreuve sur ordinateur. Pour y suppléer en partie, l'utilisation pendant les épreuves orales de calculatrices performantes a été fortement encouragée ces dernières années. La rénovation des matériels est devenue effective et à peu près continue depuis l'introduction de prêts gracieux par les constructeurs. L'introduction de tablettes de rétroprojection a suivi. Le nombre des sujets de première épreuve pour lesquels l'utilisation d'une calculatrice est encouragé ou imposé s'est accru, et en réponse, le taux d'utilisation par les candidats augmente de manière significative. Concernant les sujets de l'épreuve sur dossier, le fait que l'utilisation des calculatrices y est rendue explicite pour une partie d'entre eux, a considérablement renforcé la place des TICE.

Je tiens à remercier tous les membres du jury pour leur disponibilité et pour la motivation dont ils ont fait preuve afin de réussir une session satisfaisante à tous points de vue.

Je tiens également à remercier aussi tous nos partenaires, les éditeurs qui ont donné des manuels, les constructeurs de calculatrices qui ont prêté du matériel, les universités qui ont prêté des livres, le SIEC qui nous prête des rétroprojecteurs et qui suit de près l'organisation matérielle du concours, pour leur efficacité et leur soutien.

La session 2010

La session 2010 se déroulera selon les mêmes modalités que celles de la session 2009.

5 ANNEXES

5.1 Bibliothèque du CAPES

5.1.1 Programmes (documents disponibles dans les salles de préparation, utilisables pour les deux épreuves orales)

B.O. hors série n° 2 du 30-08-2001 : Programme de seconde générale et technologique.
B.O. hors série n° 8 du 31-08-2000 : Programme de Première ES.
B.O. hors série n° 7 du 31-08-2000 : Programme de mathématiques-informatique, Première L.
B.O. hors série n° 3 du 31-08-2001 : Programme pour l'option facultative, Première L.
B.O. hors série n° 7 du 31-08-2000 : Programme de Première S.
B.O. spécial 2 du 02-05-1991 : Programme de Première SMS, STI (sauf spécialités « Arts appliqués » et « Génie optique ») et STL.
B.O. hors série n° 8 du 02-10-1997 : Programme de Première STI spécialités « Arts appliqués » et « Génie optique ».
B.O. hors série du 24-09-1992 : Programme de Première STT (tome III, brochure 1).
B.O. hors série n° 4 du 30-08-2001 : Programme de Terminale ES.
B.O. hors série n° 3 du 30-08-2001 : Programme pour l'option facultative de Terminale L.
B.O. hors série n° 4 du 30-08-2001 : Programme de Terminale SMS, STI, STL et STT.
B.O. spécial n° 8 du 07-07-1994 : Programme de Terminale STI (sauf spécialités « Arts appliqués » et « Génie optique »).
B.O. hors série n° 8 du 02-10-1997 : Programme de Terminale STI spécialités « Art appliqués » et « Génie optique ».
B.O.E.N. spécial n° 8 du 07-07-1994 : Programme de Terminale SMS.

5.1.2 Ouvrages disponibles seulement pour l'épreuve sur dossier

Ouvrages généraux

n°	NIVEAU	TITRE	AUTEURS	ANNÉE	ÉDITEUR
1	COL	ENSEIGNER LA GÉOMÉTRIE	COUSIN-FAUCONNET	1995	ARMAND COLIN
2	COL	LE CALCUL LITTÉRAL		1999	IREM
3	COL	PETIT X N° 44		1996	IREM
4	COL	PETIT X N° 4		1984	IREM
5	COL	GESTION DE DONNÉES ET STAT		1997	IREM
6	COL	PETIT X N° 40		1995	IREM
7	COL	DES CHIFFRES ET DES LETTRES		1991	IREM
8	COL	AUTOUR DE THALÈS		1995	IREM
9	LYC	ENSEIGNER LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE N° 99		1995	APMEP
10	LYC	L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES	ROBERT, LATTUATI, PENNINCKX	1999	ELLIPSES
11	LYC	GÉOMÉTRIE	GAUTIER, COLOMB...	1999	ELLIPSES
12	LYC	MATHS ET SCIENCES ÉCO ET SOCIALES		1996	IREM
13	LYC	POUR UNE PRISE EN COMPTE DES CALCULATRICES SYMBOLIQUES EN ANALYSE		1998	IREM
14	LYC	FAIRE DES MATHS AVEC DES CALCULATRICES SYMBOLIQUES	TROUCHE	1998	IREM
15	LYC	LA GÉOMÉTRIE PLANE		1989	IREM
16	LYC	MATHS ET FILIÈRE ÉCO ET SOCIALE		1996	IREM
17	LYC	AIMER FAIRE DES MATHS 3		1996	IREM

18	LYC	AIMER FAIRE DES MATHS 4		1997	IREM
19	LYC	AIMER FAIRE DES MATHS 5		1998	IREM
20	GÉN	THÉORIE ET APPLICATIONS DE LA STATISTIQUE	MURRAY R. SPIEGEL	1972	MC GRAW-HILL
21	GÉN	LE NOMBRE PI	ADCS	1992	ACDS
22	GÉN	HISTOIRE D'ALGORITHMES : DU CAILLOU À LA PUCE	CHABERT, BARBIN...	1993	BELIN
23	GÉN	ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES		1989	CRDP
24	GÉN	COURS DE CALCUL DES PROBABILITÉS	CALOT	1967	DUNOD
25	GÉN	STATISTIQUE DESCRIPTIVE - TD	MONINO, KSIANSKI, LE CORNU	2000	DUNOD
26	GÉN	EXERCICES DE CALCUL DES PROBABILITÉS	CALOT	1986	DUNOD
27	GÉN	LES OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES : RÉFLEXES ET STRATÉGIES	BELHAJ SOULAMI	1999	ELLIPSES
28	GÉN	GÉOMÉTRIE	CARRAL	1995	ELLIPSES
29	GÉN	TOPOLOGIE GENERALE ET ANALYSE FONCTIONNELLE	SCHWARTZ	1970	HERMANN
30	GÉN	MÉTHODES MATHS POUR LES SCIENCES PHYSIQUES	SCHWARTZ	1965	HERMANN
31	GÉN	GROUPES ET GÉOMÉTRIES	SENECHAL	1979	HERMANN
32	GÉN	MÉTHODES MODERNES EN GÉOMÉTRIE	FRESNEL	1996	HERMANN
33	GÉN	APPROXIMATION ET OPTIMISATION	LAURENT	1972	HERMANN
34	GÉN	LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE	SORTAIS	1994	HERMANN
35	GÉN	ABRÉGÉ D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES	DIEUDONNÉ	1986	HERMANN
36	GÉN	CALCUL INFINITESIMAL	DIEUDONNÉ	1980	HERMANN
37	GÉN	GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE ET DU PLAN	SORTAIS	1988	HERMANN
38	GÉN	AUX ORIGINES DU CALCUL INFINITESIMAL	CERCLE D'HISTOIRE DES SCIENCES	1999	IREM
39	GÉN	POURQUOI PAS DES MATHÉMATIQUES		2000	IREM
40	GÉN	ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES 1		1999	IREM
41	GÉN	PROBLEME DE MISE EN ÉQUATIONS		1996	IREM
42	GÉN	DES STATISTIQUES À LA PENSÉE STATISTIQUE		2001	IREM
43	GÉN	ANGLES ROTATIONS		1993	IREM
44	GÉN	APPORTS DE L'OUTIL INFO... À LA GÉOMÉTRIE		1994	IREM
45	GÉN	LE VRAI ET LE FAUX	GANDIT	2001	IREM
46	GÉN	ALGORITHMIQUE & TRADUCTION POUR CALCULATRICES	DE GRAEVE	2001	IREM
47	GÉN	RALLYE : PRÊT À AFFRONTER L'ÉPREUVE DE MATH		1998	IREM
48	GÉN	HISTOIRE DES MATHS POUR NOS CLASSES		1991	IREM
49	GÉN	INITIATION À LA CRYPTOLOGIE	COHEN, OLIVIER	2000	IREM
50	GÉN	LA JUBILATION EN MATHS	DELEDICQ	2001	IREM

51	GÉN	POURQUOI AIMER ENCORE FAIRE DES MATHS		1994	IREM
52	GÉN	FRAGMENTS D'ARITHMÉTIQUE		1999	IREM
53	GÉN	UNE HISTOIRE DE CONIQUES		1996	IREM
54	GÉN	ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES 2		1999	IREM
55	GÉN	SIMILITUDES		1999	IREM
56	GÉN	INITIATION À L'ARITHMÉTIQUE		1999	IREM
57	GÉN	MATHS : APPROCHE PAR DES TEXTES HISTORIQUES TOME 2		1990	IREM
58	GÉN	INFO-MATHIC : ACTIVITES MATHS DANS UN ENVIRONNEMENT INFORMATIQUE		1998	IREM
59	GÉN	MATHS : APPROCHE PAR DES TEXTES HISTORIQUES		1986	IREM
60	GÉN	MATHS : APPROCHE PAR DES TEXTES HISTORIQUES TOME 3		2001	IREM
61	GÉN	AIMER ENCORE FAIRE DES MATHS 2		1995	IREM
62	GÉN	EXERCICES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE	TRUFFAULT	1996	IREM
63	GÉN	AIRES		2000	IREM
64	GÉN	LES CONIQUES		1997	IREM
65	GÉN	COURS DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE	TRUFFAULT, VOGEL	1995	IREM
66	GÉN	ENSEIGNER L'ARITHMÉTIQUE		2000	IREM
67	GÉN	LA RÉCURSIVITÉ EN GÉOMÉTRIE : LES FRACTALS	CUPPENS	1986	IREM
68	GÉN	MATHÉMATIQUES AU FIL DES ÂGES	GROUPE ÉPISTEMOLOGIE ET HISTOIRE	1987	IREM
69	GÉN	MÉTHODES DE MATHS ET PROGRAMMATION	NIZARD	1988	LAVOISIER TEC & DOC
70	GÉN	ÉLÉMENTS D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES	BOURBAKI	1984	MASSON
71	GÉN	MÉTHODES NUMÉRIQUES	BAKHVALOV	1976	MIR MOSCOU
72	GÉN	RECUEIL D'EXERCICES ET DE PROBLÈMES D'ANALYSE	DEMIDOVITCH	1965	MIR MOSCOU
73	GÉN	ÉPISTÉMOLOGIE DES MATHÉMATIQUES	CLERO	1990	NATHAN
74	GÉN	PROBABILITÉS ET INFÉRENCE STATISTIQUE	ABBOUD, AUDROING	1989	NATHAN
75	GÉN	DICTIONNAIRE DES MATHÉMATIQUES	BOUVIER, GEORGE, LE LIONNAIS	1996	PUF
76	GÉN	SUITES ET SÉRIES	COMBES	1982	PUF
77	GÉN	ALGÈBRE LINÉAIRE ET APPLICATIONS TOME 1	MASCART, STOKA	1984	PUF
78	GÉN	ALGÈBRE LINÉAIRE ET APPLICATIONS TOME 2	MASCART, STOKA	1985	PUF
79	GÉN	LE CALENDRIER	COUDERC	1986	QUE SAIS-JE ?
80	GÉN	LES NOMBRES ET LEURS MYSTÈRES	WARUSFEL	1961	SEUIL

81	GÉN	STATISTIQUE ET CALCUL DES PROBABILITÉS	MASIERI	1988	SIREY
82	GÉN	LE CERCLE D'EULER	COLLET, GRISO	1987	VUIBERT
83	GÉN	DICTIONNAIRE DES MATHÉMATIQUES	BOUVIER, GEORGE, LE LIONNAIS	1996	PUF
84	GÉN	ENSEIGNER LES STATS DU CM À LA SECONDE. POURQUOI ? COMMENT ?		1998	IREM

Ouvrages d'enseignement supérieur

n°	NIVEAU	TITRE	AUTEURS	ANNÉE	ÉDITEUR
1	1er CYCLE	LES MATHÉMATIQUES DE A À Z	LARROCHE, LAURENT	2002	DUNOD
2	1er CYCLE	LES SÉRIES	DELMER	1995	DUNOD
3	2e ANNÉE	BEST OF MATHÉMATIQUES : LES MEILLEURS SUJETS DE CONCOURS	BOUTILLON	2000	DUNOD
4	2e CYCLE	CALCUL DIFFÉRENTIEL ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	AZE, CONSTANS, HIRIART-URRUTY	2002	DUNOD
5	2e CYCLE	THÉORIE DES GROUPES	DELCOURT	2001	DUNOD
6	2e CYCLE	INTRODUCTION À LA LOGIQUE	DAVID, NOUR, RAFFALLI	2001	DUNOD
7	2e CYCLE, AGRÉG, ÉI	ANALYSE NUMÉRIQUE	HERON, PICARD, ISSARDROCH	1999	DUNOD
8	2e CYCLE, AGRÉG, ÉI	PROCESSUS STOCHASTIQUES : PROCESSUS DE POISSON, CHAÎNES DE MARKOV ET MARTINGALES	FOATA, FUCHS	2002	DUNOD
9	2e CYCLE, ÉI	CALCUL DIFFÉRENTIEL POUR LA LICENCE	DONATO	2000	DUNOD
10	2e CYCLE, ÉI	CALCUL SCIENTIFIQUE	SAINSAULIEU	2000	DUNOD
11	2e CYCLE, ÉI	ANALYSE NUMÉRIQUE ET ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES	NICAISE	2000	DUNOD
12	2e CYCLE	STATISTIQUE INFERENTIELLE	FOURDRINIER	2002	DUNOD
13	2e CYCLE	ÉLÉMENTS D'INTÉGRATION ET D'ANALYSE FONCTIONNELLE	EL KACIMI ALAOUI	1999	ELLIPSES
14	2e CYCLE, AGRÉG, ÉI	ANALYSE ET GÉOMÉTRIE : MÉTHODES HILBERTIENNES	ROOS	2002	DUNOD
15	AGRÉG	COURS D'ANALYSE : ANALYSE REELLE ET INTÉGRATION	DOUKHAN, SIFRE	2001	DUNOD
16	AGRÉG	COURS D'ALGÈBRE	TAUVEL	1999	DUNOD
17	AGRÉG	TOPOLOGIE ET ANALYSE FONCTIONNELLE	GONNORD, TOSEL	1996	ELLIPSES
18	AGRÉG	LEÇONS D'ALGÈBRE (PRÉPARATION À L'ORAL)	MADERE	1998	ELLIPSES
19	AGRÉG	CALCUL DIFFÉRENTIEL (THÈMES D'ANALYSE)	GONNORD, TOSEL	1998	ELLIPSES
20	AGRÉG	COURS D'ALGÈBRE	PERRIN	1996	ELLIPSES
21	AGRÉG	MODÉLISATION À L'ORAL DE L'AGRÉG : CALCUL SCIENTIFIQUE	DUMAS	1999	ELLIPSES

22	AGRÉG	THÈMES D'ANALYSE	EXBRAYAT, ALESSANDRI	1997	MASSON
23	AGRÉG	ALGÈBRE POUR L'AGRÉGATION INTERNE	TAUVEL	1996	MASSON
24	AGRÉG	ÉLÉMENTS D'ANALYSE	ZUILY, QUEFFELEC	1995	MASSON
25	ANNÉES 1&2	MATHEMATICA	COOMBES ET AL.	2000	DUNOD
26	ANNÉES 1&2	SYSTÈME D – ANALYSE	SOROSINA	1999	DUNOD
27	CAPES	ÉPREUVE ORALE D'EXPOSÉ : 33 LEÇONS POUR SE PRÉPARER EFFICACEMENT	BAJOU, SAINT-LANNES, SORBE	2003	DUNOD
28	CAPES	GÉOMÉTRIE AFFINE ET EUCLIDIENNE	DELODE	2000	DUNOD
29	CAPES	ANALYSE ET PROBAS : ÉCRITS 1996–97 (avec rappels de cours)	CHRISTOL, DECOMPS-GUILLOUX, PIQUET	1999	DUNOD
30	CAPES	ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE : ÉCRITS 1996–99 (avec rappels de cours)	BORIES-LONGUET, JARRAUD	1999	DUNOD
31	CAPES	NOS 20 SUJETS PRÉFÉRÉS	BORIS-LONGUET, DECOMPS-GUILLOUX, JARRAUD, MELEARD, PIQUET	2000	DUNOD
32	CAPES	L'ÉPREUVE SUR DOSSIER À L'ORAL : GÉOMÉTRIE	ROBERT	1995	ELLIPSES
33	CAPES	L'ÉPREUVE SUR DOSSIER À L'ORAL : ANALYSE	LAMBRE	1998	ELLIPSES
34	CAPES	ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE : ÉCRITS 1991–96 (avec rappels de cours)	BORIES-LONGUET, JARRAUD, LEVY-BRUHL	1997	MASSON
35	CAPES	ANALYSE ET PROBAS : ÉCRITS 199196 (avec rappels de cours)	MELEARD, PIQUET, DECOMPS-GUILLOUX	1997	MASSON
36	CAPES	ANALYSE (avec rappels de cours)	LEVYBRUHL, PIQUET, SERVIEN, VAUTHIER	1987	MASSON
37	CAPES	ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE	LEVYBRUHL, PIQUET, SERVIEN, VAUTHIER	1987	MASSON
38	CAPES	34 PROBLÈMES CORRIGÉS POSES À L'ÉCRIT DU CAPES	CHEVALLET	1999	VUIBERT SUP
39	CAPES & AGRÉG	STRUCTURES ALGÉBRIQUES EN GÉOMÉTRIE	AIME	1999	ELLIPSES
40	CAPES & AGRÉG	GÉOMÉTRIE : COURS ET EXERCICES CORRIGÉS	BIGARD	1998	MASSON
41	CAPES & AGRÉG	ALGÈBRE LINÉAIRE (COURS ET EXERCICES)	ROUDIER	2003	VUIBERT
42	CAPES & AGRÉG INTERNE	COMPLEMENTS D'ALGÈBRE ET DE GÉOMÉTRIE	DE BIASI	2000	ELLIPSES

43	CAPES & AGRÉG INTERNE	MATHÉMATIQUES POUR LE CAPES ET L'AGRÉG INTERNE	DE BIASI	1998	ELLIPSES
44	CAPES & AGRÉG INTERNE	MATHÉMATIQUES POUR LE CAPES ET L'AGRÉG INTERNE	DE BIASI	1995	ELLIPSES
45	CNAM	INITIATION À L'ANALYSE NUMÉRIQUE	THEODOR	1989	MASSON
46	CYCLES 1&2, ÉI	TOUTES LES MATHÉMATIQUES	STÖCKER	2002	DUNOD
47	DEUG	MATHÉMATIQUES	DELMER	1996	DUNOD
48	DEUG	FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES ET INTÉGRATION	DELMER	1997	DUNOD
49	DEUG 1	EXERCICES D'ANALYSE : CALCUL INTÉGRAL	BOSCHET	1997	MASSON
50	DEUG A1	ENSEIGNER AUTREMENT LES MATHÉMATIQUES		1990	IREM
51	DEUG MIAS MASS	ALGÈBRE GENERALE, TD	DENMAT, HEAULME	2000	DUNOD
52	DEUG MIAS MASS	BEST OF ANALYSE 1re ANNÉE	PARZYSZ	2001	DUNOD
53	DEUG MIAS MASS SM	ALGÈBRE 1re ANNÉE	LIRET, MARTINAIS	1997	DUNOD
54	DEUG MIAS MASS SM	ANALYSE 1re ANNÉE	LIRET, MARTINAIS	1997	DUNOD
55	DEUG MIAS MASS SM	ANALYSE 2e ANNÉE	LIRET, MARTINAIS	1998	DUNOD
56	DEUG MIAS MASS SM	ANALYSE 2e ANNÉE	PROCHASSON	2000	DUNOD
57	DEUG MIAS MASS SM	ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE 2e ANNÉE	PROCHASSON	2001	DUNOD
58	DEUG SVT	ANALYSE	BLONDEL	2000	DUNOD
59	DEUG 1	EXERCICES D'ANALYSE : 176 EXERCICES ET 105 TESTS CORRIGÉS (avec rappels de cours)	SCHMITT	1997	MASSON
60	DEUG 1	FONCTIONS D'UNE VARIABLE	CALVO	1997	MASSON
61	DEUG 1 SM	COURS DE MATHÉMATIQUES	DIXMIER	1976	GAUTHIER-VILLARS
62	DEUG 2 SM	COURS DE MATHÉMATIQUES	DIXMIER	1977	GAUTHIER-VILLARS
63	LICENCE	ALGÈBRE 3e ANNÉE	SCHWARTZ	2003	DUNOD
64	LICENCE	TOPOLOGIE ET ANALYSE	SKANDALIS	2001	DUNOD
65	LICENCE 1 MIAS MASS SM	ALGÈBRE 1re ANNÉE	LIRET, MARTINAIS	2003	DUNOD
66	LICENCE 1 MIAS MASS SM	ANALYSE 1re ANNÉE	LIRET, MARTINAIS	2003	DUNOD
67	LICENCE 3, MASTER1, ÉI	INTRODUCTION À L'ANALYSE NUMÉRIQUE : APPLICATIONS SOUS MATLAB	BASTIEN, MARTIN	2003	DUNOD

68	LICENCE 1 MIAS MASS SM	LES MATHÉMATIQUES EN LICENCE TOME 1	AZOULAY, AVIGNANT, AULIAC	2003	EDISCIENCE
69	MAÎTRISE	INTRODUCTION À L'ANALYSE NUMÉRIQUE MATRICIELLE ET À L'OPTIMISATION	CIARLET	1988	MASSON
70	MAÎTRISE	INTRODUCTON À L'ANALYSE NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES	RAVIART, THOMAS	1988	MASSON
71	MASTER, ÉI	SIMULATION NUMÉRIQUE EN C++	DANAILA, HECHT, PIRONNEAU	2003	DUNOD
72	MASTER 1&2, AGRÉG	INTRODUCTION À LA THÉORIE SPECTRALE	LEVY-BRUHL	2003	DUNOD
73	MP	L'ORAL (ENTRAÎNEMENT AUX CONCOURS)	MONIER	2002	DUNOD
74	PRÉPA 1	ANALYSE 1 – COURS TOME 1	MONIER	1997	DUNOD
75	PRÉPA 1	ANALYSE 2 – COURS TOME 2	MONIER	1996	DUNOD
76	PRÉPA 1	ALGÈBRE 1	MONIER	2000	DUNOD
77	PRÉPA 1&2	GÉOMÉTRIE	MONIER	2000	DUNOD
78	PRÉPA 2	ALGÈBRE 2 – COURS TOME 6	MONIER	1998	DUNOD
79	PRÉPA 2	ANALYSE – TOME 3	MONIER	1997	DUNOD
80	PRÉPA 2	ANALYSE 4 – TOME 4	MONIER	1997	DUNOD
81	PRÉPA 1	ALGÈBRE 1 – COURS TOME 5	MONIER	1996	DUNOD
82	PRÉPA 1&2	GÉOMÉTRIE – TOME7	MONIER	1997	DUNOD
83	PRÉPA 2	MATHÉMATIQUES 2^{e} ANNÉE	DESCHAMPS, WARUSFEL...	2001	DUNOD
84	PRÉPA 2	ANALYSE 3 – COURS TOME 3	MONIER	1997	DUNOD
85	STS-IUT	SÉRIES DE FOURIER, TRANSFORMATION DE LAPLACE	BENICHOU, BOY, POUGET	1995	ELLIPSES
86		ANALYSE	BLONDEL	2000	DUNOD
87		LE NOMBRE D'OR ET LES NOMBRES DE FIBONACCI	MEYER STEYAERT	1981	IREM
88		PROBAS ET STATS		1996	IREM
89		L'ENSEIGNEMENT DES STATS ET PROBAS		1999	IREM
90		RMS		1998/1999	VUIBERT

Manuels scolaires

n^{o}	NIV	SÉRIE	TITRE	REM	AUTEURS	AN	ÉDITEUR
1	6^{e}		DÉCIMALE			1996	BELIN
2	6^{e}		MATH ET CLIC			2000	BORDAS
3	6^{e}		NUL EN MATHS ?			1997	BORDAS
4	6^{e}		MATHS			1996	BORDAS
5	6^{e}		MATH ET CLIC	PROF		2000	BORDAS
6	6^{e}		DIMATHÈME			2000	DIDIER
7	6^{e}		100 PROBLÈMES SANS PEINE			1998	HACHETTE
8	6^{e}		CINQ SUR CINQ			1994	HACHETTE
9	6^{e}		ALPHA			1994	HATIER
10	6^{e}		TRIANGLE			1996 2000	HATIER
11	6^{e}		DOCUMENTS D'ACCOMPAGNEMENT			1996	M.E.N.
12	6^{e}		TRANSMATH			1996	NATHAN
13	5^{e}		DÉCIMALE			1997	BELIN
14	5^{e}		MATHS JAUNE			1997	BORDAS
15	5^{e}		MATHÉMATIQUES		SERRA	2001	BORDAS

16	5^{e}		MATHÉMATIQUES	PROF	CORRIEU BATIER		DELAGRAVE
17	5^{e}		DIMATHÈME			1997	DIDIER
18	5^{e}		DIMATHÈME			2001	DIDIER
19	5^{e}		CINQ SUR CINQ			1997 2000	HACHETTE
20	5^{e}		NOUVEAU PYTHAGORE	PROF		1997	HATIER
21	5^{e}		TRIANGLE	PROF		1997	HATIER
22	5^{e}		TRANSMATH			1997	NATHAN
23	5^{e}		TRANSMATH	PROF		2001	NATHAN
24	4^{e}		DÉCIMALE			1998	BELIN
25	4^{e}		MATHÉMATIQUES			1998	BORDAS
26	4^{e}		MÉDIAMATH			2002	BORDAS
27	4^{e}		MÉTHODES EN PRATIQUE			1988	CRDP
28	4^{e}		DIMATHÈME			1998	DIDIER
29	4^{e}		DIMATHÈME			2002	DIDIER
30	4^{e}		TOUT SIMPLEMENT			1998	HACHETTE
31	4^{e}		CINQ SUR CINQ			2002	HACHETTE
32	4^{e}		CINQ SUR CINQ			1998	HACHETTE
33	4^{e}		DIABOLO			2003	HACHETTE
34	4^{e}		TRIANGLE			1998	HATIER
35	4^{e}		NOUVEAU PYTHAGORE			1998	HATIER
36	4^{e}		TOUT LE PROGRAMME EN 300 EXERCICES			1997	HATIER
37	4^{e}		SUIVI SCIENTIFIQUE		IREM	1988	INTER IREM
38	4^{e}		NOUVEAU TRANSMATH	PROF		1998	NATHAN
39	4^{e}		TRANSMATH	PROF		2002	NATHAN
40	4^{e}		TRANSMATH			1988	NATHAN
41	3^{e}		COMPRENDRE ET RÉUSSIR			1997	BELIN
42	3^{e}		MÉTHODES EN PRATIQUE			1989	CRDP
43	3^{e}		DIMATHÈME			1999	DIDIER
44	3^{e}		CINQ SUR CINQ	PROF		2003	HACHETTE
45	3^{e}		CINQ SUR CINQ			1999	HACHETTE
46	3^{e}		TOUT SIMPLEMENT			1999	HACHETTE
47	3^{e}		NOUVEAU PYTHAGORE	PROF		1999	HATIER
48	3^{e}		TRIANGLE			1999	HATIER
49	3^{e}		TRIANGLE	PROF		2003	HATIER
50	3^{e}		SUIVI SCIENTIFIQUE		IREM	1989	INTER IREM
51	3^{e}		MATHÉMATIQUES			1999	BORDAS
52	3^{e}		DIABOLO			2004	HACHETTE
53	2de		MATHÉMATIQUES			1998	BELIN
54	2de		INDICE			2000	BORDAS
55	2de		MATHÉMATIQUES	PROF		2000	BREAL
56	2de		MATHÉMATIQUES			2000	BREAL
57	2de		MODULOMATH			2004	DIDIER
58	2de		DIMATHÈME			2000	DIDIER
59	2de		REPÈRES			2004	HACHETTE
60	2de		PYRAMIDE			2000	HACHETTE
61	2de		DÉCLIC			1998	HACHETTE
62	2de		SIGMATH			1998	HATIER
63	2de		ÉNONCÉS ET SCÉNARIOS			1993	INTER IREM
64	2de		LIAISON COLLÈGE SECONDE			1990	INTER IREM
65	2de		HYPERBOLE			2000	NATHAN
66	2de		TRANSMATH			2000	NATHAN
67	2de		PHYSIQUE	PHYSIQUE	DURRAN-DEAU	2000	HACHETTE
68	1re	ES	FRACTALE	OBLIG		1998	BORDAS

69	1^{re}	ES	FRACTALE	OPT		1998	BORDAS
70	1^{re}	ES	MATHÉMATIQUES			2001	BREAL
71	1^{re}	ES	DIMATHÈME	OBLIG		2001	DIDIER
72	1^{re}	ES	DIMATHÈME	OPT		2001	DIDIER
73	1^{re}	ES	DÉCLIC			2001	HACHETTE
74	1^{re}	ES	TRANSMATH			1998	NATHAN
75	1^{re}	ES	TRANSMATH			2001	NATHAN
76	1^{re}	ES	HYPERBOLE			2001	NATHAN
77	1^{re}	L	INDICE			2001	BORDAS
78	1^{re}	L	MATH INFO			2001	DELAGRAVE
79	1^{re}	L	MANUEL DE MATHÉMATIQUES			2002	ELLIPSES
80	1^{re}	L	FICHES TD TP			2002	ELLIPSES
81	1^{re}	L	MATH INFO			2003	HACHETTE
82	1^{re}	L	DÉCLIC			1999	HACHETTE
83	1^{re}	L	DÉCLIC			2001	HACHETTE
84	1^{re}	L	MATH INFO			2001	HATIER
85	1^{re}	L	TRANSMATH			2001	NATHAN
86	1^{re}	S	MATHÉMATIQUES			2001	BELIN
87	1^{re}	S	INDICE			2001	BORDAS
88	1^{re}	S	FRACTALE			2001	BORDAS
89	1^{re}	S	MATHÉMATIQUES			2001	BREAL
90	1^{re}	S	DIMATHÈME	GÉOMÉTRIE		2001	DIDIER
91	1^{re}	S	DIMATHÈME	ANALYSE		2001	DIDIER
92	1^{re}	S	GÉOMÉTRIE		TERRACHER	2001	HACHETTE
93	1^{re}	S	DÉCLIC			2001	HACHETTE
94	1^{re}	S	ANALYSE		TERRACHER	2001	HACHETTE
95	1^{re}	S	TRANSMATH			2001	NATHAN
96	1^{re}	S	HYPERBOLE			2001	NATHAN
97	1^{re}	SMS	DIMATHÈME			1998	DIDIER
98	1^{re}	STI	DIMATHÈME			1998	DIDIER
99	1^{re}	STT	INDICE			2003	BORDAS
100	1^{re}	STT	SIGMATH			2001	FOUCHER
101	1^{re}	STT	MATHÉMATIQUES			2002	HACHETTE
102	T^{le}	ÉS	FRACTALE	SP		1998	BORDAS
103	T^{le}	ÉS	FRACTALE	OBL		1998	BORDAS
104	T^{le}	ÉS	MATHÉMATIQUES			2002	BREAL
105	T^{le}	ÉS	MATHÉMATIQUES			1998	BREAL
106	T^{le}	ÉS	DIMATHÈME	SP		1998	DIDIER
107	T^{le}	ÉS	DIMATHÈME	OBL		1998	DIDIER
108	T^{le}	ÉS	DÉCLIC			1998	HACHETTE
109	T^{le}	ÉS	DÉCLIC			2002	HACHETTE
110	T^{le}	ÉS	LE GUIDE ABC BAC			2002	NATHAN
111	T^{le}	ÉS	TRANSMATH			2002	NATHAN
112	T^{le}	ÉS	HYPERBOLE			2002	NATHAN
113	T^{le}	L	DÉCLIC			1999	HACHETTE
114	T^{le}	S	MATHÉMATIQUES			1998	BELIN
115	T^{le}	S	FRACTALE	OBL		1998	BORDAS
116	T^{le}	S	FRACTALE	SP		1998	BORDAS
117	T^{le}	S	FRACTALE	SP		2002	BORDAS
118	T^{le}	S	FRACTALE	OBL		2002	BORDAS
119	T^{le}	S	INDICE	SP		2002	BORDAS
120	T^{le}	S	INDICE	OBL		2002	BORDAS
121	T^{le}	S	MATHÉMATIQUES	SP		2002	BREAL
122	T^{le}	S	MATHÉMATIQUES	OBL		2002	BREAL
123	T^{le}	S	MATHÉMATIQUES	SP		1998	BREAL
124	T^{le}	S	MATHÉMATIQUES	OBL		1998	BREAL
125	T^{le}	S	DIMATHÈME	SP		1998	DIDIER
126	T^{le}	S	DIMATHÈME	OBL		1998	DIDIER
127	T^{le}	S	BAC AVEC MENTION			1998	ELLIPSES

128	T^{le}	S	EXERCICES			1999	ELLIPSES
129	T^{le}	S	FOR MATH			1999	ELLIPSES
130	T^{le}	S	MATHÉMATIQUES	SP	TERRACHER	1998	HACHETTE
131	T^{le}	S	MATHÉMATIQUES	OBL	TERRACHER	1998	HACHETTE
132	T^{le}	S	DÉCLIC	SP		1998	HACHETTE
133	T^{le}	S	DÉCLIC	OBL		1998	HACHETTE
134	T^{le}	S	CORRIGÉS		TERRACHER	1998	HACHETTE
135	T^{le}	S	CORRIGÉS		TERRACHER	1996	HACHETTE
136	T^{le}	S	MATHÉMATIQUES		TERRACHER	2002	HACHETTE
137	T^{le}	S	DÉCLIC			2002	HACHETTE
138	T^{le}	S	TRANSMATH	OBL		2002	NATHAN
139	T^{le}	S	TRANSMATH	SP		1998	NATHAN
140	T^{le}	S	TRANSMATH	OBL		1998	NATHAN
141	T^{le}	S	HYPERBOLE	OBL		2002	NATHAN
142	T^{le}	S	HYPERBOLE	SP		2002	NATHAN
143	T^{le}	STI	DIMATHÈME			1997	DIDIER
144	T^{le}	STI	MATHÉMATIQUES			1998	HACHETTE
145	T^{le}	STI	MATHÉMATIQUES			1998	NATHAN
146	T^{le}	STT	COMPTABILITÉ GESTION			1999	DIDIER
147	T^{le}	STT	DIMATHÈME			1999	DIDIER
148	T^{le}	STT	COMPTABILITÉ GESTION			1997	FOUCHER
149	T^{le}	STT	MATHS ACA ET ACC			1997	FOUCHER
150	T^{le}	STT	MATHS ACA ET ACC			2002	HACHETTE
151	T^{le}	STT	MATHS ACA ET ACC			1998	HACHETTE
152	T^{le}	STT	COMPTABILITÉ GESTION			1998	HACHETTE
153	T^{le}	STT	COMPTABILITÉ GESTION			2002	HACHETTE
154	T^{le}	STT	COMPTABILITÉ GESTION			1998	NATHAN
155	T^{le}	STT	MATHS ACA ET ACC			1998	NATHAN
156	T^{le}		ENSEIGNER LES PROBAS			1994	IREM
157	BÉP	IN-DUS-TRIEL	MATHÉMATIQUES 2		BARUSSAUD, FAVRE ARTIGUES, THEVENON	1994	FOUCHER
158	BÉP	IN-DUS-TRIEL	MATHÉMATIQUES	INDUS-TRIEL, SANI-TAIRE ET SOCIAL	ASTIER, VRIGNAUD	2002	NATHAN
159	BÉP	TER-TIAIRE	LES CAHIERS DE MATHÉMATIQUES		BARUSSAUD, NOËL	2001	FOUCHER
160	BÉP	TER-TIAIRE	MATHÉMATIQUES	TER-TIAIRE, HÔTEL-LERIE, RESTAU-RATION	ASTIER, VRIGNAUD	2002	NATHAN
161	BTS	IN-DUS-TRIEL	ANALYSE, ALGÈBRE LINÉAIRE, NOMBRES COMPLEXES	BÂTIMENT & LABO	VERLANT	1997	FOUCHER
162	BTS	IN-DUS-TRIEL					FOUCHER
163	BTS	TER-TIAIRE	ANALYSE ET ALGÈBRE LINÉAIRE TOME 1	INFOR-MA-TIQUE ET GESTION	VERLANT	1997	FOUCHER
164	BTS	TER-TIAIRE					HACHETTE
165	BTS		PROBAS ET STATS, STATS INFÉRENTIELLES			1996	IREM

166	BTS IUT		PROBAS ET STATS		GACÔGNE, FRUGIER	1990	EYROLLES

Annales

n°	NIVEAU	SÉRIE	TITRE	REM	ANNÉE	ÉDITEUR
1	BAC	ÉS	ANNALES	CORRIGÉS	1998	HATIER
2	BAC	ÉS	ANNALES	SUJETS	1998	HATIER
3	BAC	ÉS	ANNALES	SUJETS	1995	VUIBERT
4	BAC	ÉS L	ANNALES	SUJETS	1997	NATHAN
5	BAC	ÉS L	ANNALES	CORRIGÉS	1997	NATHAN
6	BAC	ÉS L	ANNALES	CORRIGÉS	1998	VUIBERT
7	BAC	ÉS L	ANNALES	SUJETS	1998	VUIBERT
8	BAC	L	ANNALES	CORRIGÉS	1998	HATIER
9	BAC	L	ANNALES	SUJETS	1998	HATIER
10	BAC	L	ANNALES	SUJETS	2000	HATIER
11	BAC	L	ANNALES	SUJETS	2001	HATIER
12	BAC	L	ANNALES	SUJETS	1996	VUIBERT
13	BAC	S	ANNALES	CORRIGÉS	1998	HATIER
14	BAC	S	ANNALES	CORRIGÉS	1998	HATIER
15	BAC	S	ANNALES	SUJETS	1998	HATIER
16	BAC	S	ANNALES	SUJETS	1997	NATHAN
17	BAC	S	ANNALES	CORRIGÉS	1998	NATHAN
18	BAC	S	ANNALES	CORRIGÉS	1998	VUIBERT
19	BAC	S	ANNALES	SUJETS	1998	VUIBERT
20	BAC	S	ANNALES	SUJETS	1996	VUIBERT
21	BAC	S	ANNALES	SUJETS	1995	VUIBERT
22	BAC	STT STI	ANNALES	SUJETS	1995	NATHAN
23	BAC	STT STI	ANNALES	CORRIGÉS	1996	NATHAN
24	BAC	STT STI	ANNALES	CORRIGÉS	1998	NATHAN
25	BAC	STT STI	ANNALES	SUJETS	1998	NATHAN
26	BREVET		ANNALES	CORRIGÉS	1998	HATIER
27	BREVET		ANNALES	CORRIGÉS	1997	NATHAN
28	BREVET		ANNALES	SUJETS	1997	NATHAN
29	BREVET		ANNALES	SUJETS	1998	NATHAN
30	BREVET		ANNALES	CORRIGÉS	1994	VUIBERT
31	BREVET		ANNALES	SUJETS	1994	VUIBERT
32	BREVET		ANNALES	SUJETS	1995	VUIBERT
33	BREVET		ANNALES	SUJETS	1996	VUIBERT
34	BREVET		ANNALES	SUJETS	1998	VUIBERT

Le jury remercie tous les éditeurs qui ont contribué à l'actualisation de la bibliothèque en facilitant l'acquisition de leurs ouvrages récents.

5.2 Calculatrices

Depuis la session 1994, les calculatrices personnelles sont interdites pour les deux épreuves orales (cf. B.O. n° 13 du 15-04-93). Pour les sujets qui en nécessiteraient l'usage, les candidats pourront en emprunter une à la bibliothèque du CAPES.

Pour la session 2009 trois constructeurs ont permis par des prêts gracieux de proposer une quantité suffisante de modèles récents de calculatrices rétroprojetables.

Casio Classpad 300
Hewlett-Packard 49g (à ne pas confondre avec le modèle 49g+)
Texas Instruments Voyage 200
Texas Instruments Nspire CAS (à ne pas confondre avec le modèle Nspire).

Le jury, dans le souci d'aider candidats et formateurs à se préparer de manière efficace aux épreuves, a mis en ligne sur son site des documents sur ces calculatrices que tout visiteur du site peut librement utiliser. Ces documents, assortis d'une introduction, montrent dans quel esprit le jury souhaite voir utiliser ces machines. Des exemplaires imprimés de ces textes étaient mis à la disposition des candidats pendant leur préparation, de sorte qu'il leur était inutile de s'en munir.

Pour la session 2010, les modèles de calculatrices disponibles lors des épreuves orales seront les mêmes que ceux de 2009 :

Casio Classpad 300
Hewlett-Packard 49g (à ne pas confondre avec le modèle 49g+)
Texas Instruments Voyage 200
Texas Instruments Nspire CAS (à ne pas confondre avec le modèle Nspire).

FIN DU RAPPORT