Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

ministère
éducation
nationale

Secrétariat Général
Direction générale des ressources humaines
Sous-direction du recrutement

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Concours du second degré — Rapport de jury

Session 2008

CAPES EXTERNE

MATHÉMATIQUES

Rapport de jury présenté par
Mohamed KRIR, Président de jury

Les rapports des jurys sont établis sous la responsabilité des présidents de jury

CONSEILS PRATIQUES AUX FUTURS CANDIDATS

Il est recommandé aux futurs candidats de s'informer à l'avance sur les modalités des concours de recrutement en général et sur celles particulières au CAPES externe et au CAFEP-CAPES de mathématiques.

Les renseignements généraux (les conditions d'accès ; la préparation ; le déroulement du concours ; la carrière dans l'enseignement secondaire) se trouvent sur le site du Ministère

http://education.gouv.fr

rubrique SIAC2.

Les informations spécifiques (programmes ; nature des épreuves) sont publiées dans le bulletin officiel de l'éducation nationale, publication qui informe les enseignants : carrière, programmes, nominations, vacances de postes, concours, etc. Ces renseignements se trouvent également, pour l'essentiel, dans le rapport du concours.

Le jury, pour faciliter la recherche d'information émanant des candidats et des formateurs, a en outre créé un site à l'adresse :

http://capes-math.org

sur lequel il a réuni l'essentiel des informations utiles à la préparation au concours.

ATTENTION : Les informations figurant sur ce site n'ont pas de caractère officiel ; seules les informations délivrées directement par la DPE et par le Ministère ont valeur officielle.

« LES RAPPORTS DES JURYS DES CONCOURS SONT ÉTABLIS SOUS LA RESPONSABILITÉ DES PRÉSIDENTS DE JURY »

Table des matières

1 PRÉSENTATION DU CONCOURS 2008

1.1 Composition du jury.

Par arrêté en date du 14 février 2008, la composition du jury est la suivante :

M.	KRIR	Mohamed	Maître de Conférences, Président	Versailles
M.	AGUER	Bernard	IA-IPR, Secrétaire général	Amiens
M.	ANDRIEUX	Jean-Claude	Professeur Agrégé, Vice-président	Dijon
Mme	FLEURY-BARKA	Odile	Maître de Conférences, Vice-présidente	Reims
M.	MORENO-SOCIAS	Guillaume	Maître de Conférences, Vice-président	Versailles
M.	SORBE	Xavier	IGEN, Vice-président	Paris
Mme	ABABOU	Rachel	Maître de Conférences	Rennes
Mme	ABADIE	Marie-Luce	Professeur Agrégé	Bordeaux
Mme	ANANOU	Chantal	Professeur Agrégé	Paris
Mme	ANDRÉ	Stéphanie	Professeur Agrégé	Orléans-Tours
M.	ARTIGUES	Christian	IA-IPR	Bordeaux
M.	ARTIGUES	Jean-Paul	Professeur de Chaire Supérieure	Rouen
Mme	AUDOUIN	Marie-Claude	IA-IPR	Versailles
M.	BAJI	Bruno	Professeur Agrégé	Limoges
Mme	BANTEGNIES	Florence	Professeur de Chaire Supérieure	Paris
M.	BARBE	Jacques	Professeur Agrégé	Nantes
M.	BARLIER	Philippe	Professeur Agrégé	Nantes
M.	BECHATA	Abdellah	Professeur Agrégé	Caen
M.	BELLY	Daniel	Professeur Agrégé	Nice
M.	BERGERON	Axel	Professeur de Chaire Supérieure	Nantes
M.	BERNARD	Frédéric	Professeur Agrégé	Montpellier
M.	BILGOT	Jean-François	IA-IPR	Clermont-Ferrand
M.	BILLAULT	Éric	Professeur Agrégé	Rennes
Mme	BLANCHET	Anne	Professeur Agrégé	Grenoble
Mme	BLAU	Danielle	IA-IPR	Toulouse
Mme	BOISSONNET	Émilia	Professeur Agrégé	Paris
Mme	BONVALOT-LAURENT	Françoise	Professeur Agrégé	Caen
M.	BOULMEZAOUD	Tahar Zamène	Maître de Conférences	Versailles
M.	BOURGES	William	Professeur Agrégé	Aix-Marseille
Mme	BOUTON-DROUHIN	Catherine	Professeur de Chaire Supérieure	Versailles
Mme	BRAMOULLÉ	Laurence	Professeur Agrégé	Poitiers
M.	BRANDEBOURG	Patrick	IA-IPR	Aix-Marseille

M.	BRAUNER	Joël	Professeur de Chaire Supérieure	Nancy-Metz
Mme	BRUYANT	Francine	Maître de Conférences	Reims
M.	BURG	Pierre	Professeur Agrégé	Strasbourg
M.	CANON	Éric	Maître de Conférences	Besançon
M.	COMPOINT	Élie	Maître de Conférences	Lille
M.	COUCHOURON	Jean-François	Maître de Conférences	Nancy-Metz
Mme	COURBON	Denise	IA-IPR	Lyon
Mme	COURÇON	Nicole	Professeur Agrégé	Nantes
M.	COURILLEAU	Patrick	Maître de Conférences	Versailles
Mme	DARRACQ-CALMETTES	Marie-Cécile	Professeur Agrégé	Grenoble
M.	DE BIÈVRE	Stéphan	Professeur des Universités	Lille
M.	DE SAINT JULIEN	Arnaud	Professeur Agrégé	Montpellier
Mme	DEAT	Joëlle	IA-IPR	Versailles
Mme	DELYON	Geneviève	Professeur Agrégé	Versailles
M.	DESCHAMPS	Bruno	Professeur des Universités	Nantes
Mme	DESSAIGNE (ex LEROY)	Aurélie	Professeur Agrégé	Versailles
M.	DIAGNE	Malick	Professeur Agrégé	Orléans-Tours
M.	DIGER	Alain	IA-IPR	Orléans-Tours
Mme	DUCOURTIOUX	Catherine	Maître de Conférences	Corse
Mme	ERNOULT	Monique	Professeur Agrégé	Créteil
M.	ESCOFFIER	Jérôme	Professeur de Classes Préparatoires	Aix-Marseille
Mme	ÉVRARD	Sabine	Professeur Agrégé	Amiens
M.	FAURE	Christian	IA-IPR	Lyon
M.	FAURE	Ludovic	Professeur Agrégé	Bordeaux
Mme	GEST	Monique	Professeur Agrégé	Lille
M.	GIRAULT	Dominique	Professeur Agrégé	Poitiers
M.	GLIÈRE	André-Jean	Professeur Agrégé	Nantes
M.	GRAS	Hervé	Professeur Agrégé	Créteil
M.	GROISON	Jean-Marc	Professeur Agrégé	Lyon
Mme	HAEGEL	Suzy	Professeur Agrégé	Strasbourg
M.	HANS	Jean-Luc	Professeur de Chaire Supérieure	Besançon
M.	HARLÉ	Jean	Professeur de Chaire Supérieure	Amiens
M.	HASSAN	Azzam	Professeur Agrégé	Grenoble
M.	HONVAULT	Pascal	Maître de Conférences	Lille
Mme	HOUARD	Catherine	Professeur Agrégé	Versailles
Mme	HUG	Patricia	Professeur Agrégé	Versailles
M.	JAMET	Pierre-Yves	Professeur de Chaire Supérieure	Aix-Marseille
M.	JANIN	Robert	Professeur des Universités	Guadeloupe
Mme	JAUFFRET	Brigitte	IA-IPR	Aix-Marseille

Mme	JOINT	Marie-Emmanuelle	Professeur Agrégé	Rennes
Mme	KHERIEF	Khamsa	Professeur Agrégé	Paris
Mme	KOWALSKA-CHASSAING	Anna	Professeur Agrégé	Nancy-Metz
M.	LAAMRI	El-Haj	Maître de Conférences	Nancy-Metz
Mme	LACRESSE	Christelle	Professeur Agrégé	Nancy-Metz
M.	LAGRAIS	Alain	Professeur Agrégé	Nantes
Mme	LAGUILLIER	Marie-Thérèse	Professeur Agrégé	Créteil
Mme	LAMPLE	Hélène	Professeur Agrégé	Lyon
Mme	LANERY	Hélène	Professeur Agrégé	Amiens
Mme	LANGLOIS	Catherine	Professeur Agrégé	Lyon
Mme	LAPOLE	Isabelle	Professeur Agrégé	Amiens
M.	LAPOLE	René	Professeur Agrégé	Amiens
M.	LAZAR	Boris	IA-IPR	Rennes
M.	LE FLOCH	Laurent	Maître de Conférences	Poitiers
M.	LEBRUN	Guillaume	Professeur Agrégé	Nantes
Mme	LÉCUREUX-TETU	Marie-Hélène	Professeur Agrégé	Toulouse
M.	LEFEUVRE	Yann	Professeur Agrégé	Amiens
M.	LEGROS	Stéphane	Professeur de Chaire Supérieure	Rouen
M.	LEMPEREUR DE GUERNY	Robert	Professeur Agrégé	Versailles
M.	LETORT	Pierre-Yves	Professeur Agrégé	Bordeaux
M.	LUCAS	Édouard	Professeur Agrégé	Paris
Mme	MALLÉGOL	Pascale	Professeur Agrégé	Nancy-Metz
M.	MARINO	Alexandre	Professeur Agrégé	Nice
Mme	MAROTTE	Fabienne	Maître de Conférences	Poitiers
M.	MAUGER	David	Maître de Conférences	Paris
Mme	MENINI	Chantal	Maître de Conférences	Bordeaux
M.	MERCKHOFFER	René	IA-IPR	Versailles
Mme	MERDY	Claudine	Professeur Agrégé	Créteil
M.	MICHALAK	Pierre	IA-IPR	Versailles
Mme	MILIN	Sylvie	Professeur Agrégé	Versailles
Mme	MUNCK	Françoise	IA-IPR	Nantes
Mme	NAUD	Claire	Professeur Agrégé	Versailles
M.	NIN	Gérard	Maître de Conférences	Aix-Marseille
Mme	NOGUÈS	Maryse	IA-IPR	Aix-Marseille
M.	OUDET	Édouard	Maître de Conférences	Grenoble
M.	PAGOTTO	Éric	IA-IPR	Caen
M.	PAINTANDRE	Stéphan	Professeur Agrégé	Toulouse
Mme	PAOLANTONI	Victoria	Professeur Agrégé	Aix-Marseille
M.	PETIT	Francis	IA-IPR	Grenoble
Mme	PLANCHE	Nathalie	Professeur Agrégé	Clermont-Ferrand
Mme	POLLAK	Yolaine	Professeur Agrégé	Versailles
M.	PUYOU	Jacques	Professeur Agrégé	Bordeaux
M.	REVRET	Richard	Professeur Agrégé	Lille
M.	REZZOUK	Marc	Professeur Agrégé	Rouen
M.	ROBLET	Emmanuel	Professeur de Chaire Supérieure	Paris

M.	ROLLAND	Hervé	Professeur Agrégé	Rennes
M.	ROMOLI	David	Professeur Agrégé	Nantes
Mme	ROUANET	Véronique	Professeur Agrégé	Créteil
Mme	ROUDNEFF	Évelyne	IA-IPR	Versailles
M.	ROUX	Hervé	Professeur Agrégé	Aix-Marseille
M.	SAAI	Mustapha	Professeur Agrégé	Nancy-Metz
Mme	SABBAN	Chloé	Professeur Agrégé	Paris
Mme	SANZ	Monique	IA-IPR	Nantes
M.	SASSI	Taoufik	Professeur des Universités	Caen
M.	SCATTON	Philippe	IA-IPR	Reims
M.	SERRA	Éric	IA-IPR	Nice
M.	SOUVILLE	Jean	Maître de Conférences	Poitiers
M.	TERRACHER	Pierre	Maître de Conférences	Bordeaux
Mme	TERREAU	Corinne	Professeur Agrégé	Dijon
M.	TESTUD	Benoît	Maître de Conférences	Amiens
M.	THYS	Henrik	Professeur Agrégé	Besançon
M.	TOUPANCE	Pierre-Alain	Professeur Agrégé	Lyon
Mme	TRÉFOND	Marie-Christine	Professeur Agrégé	Amiens
M.	TRUCHAN	Alain	IA-IPR	Poitiers
M.	VEERAVALLI	Alain	Maître de Conférences	Versailles
M.	VIAL	Jean-Pierre	Professeur de Chaire Supérieure	Paris
M.	VINAVER	Georges	Professeur Agrégé	Versailles
Mme	WERQUIN	Claude	Professeur Agrégé	Versailles
M.	WERQUIN	Philippe	Professeur de Chaire Supérieure	Versailles
M.	YAHIA-BERROUIGUET	Mohamed	Professeur Agrégé	Aix-Marseille

1.2 Programme du concours

Le texte en vigueur, paru au B.O. n° 8 spécial du 24 mai 2001, a été modifié par le B.O. n° 5 spécial du 20 mai 2004. Les modifications, mineures, visaient essentiellement à mettre en cohérence le programme avec les évolutions des programmes des classes de lycée. Le texte ci-dessous tient compte de ces modifications.

ÉPREUVES ÉCRITES

Le programme est formé des titres A et B de l'annexe I.

ÉPREUVES ORALES D'ÉXPOSÉ

Le programme est formé du titre A augmenté des paragraphes suivants du titre B de l'annexe I :
1.II. « Ensembles, relations, applications. »
2.I.3. « Structures des ensembles de nombres. »
2.III.5. « Calcul matriciel », alinéa b).
2.IV.2. « Géométrie vectorielle », alinéa e).
2.V.2. « Configurations. »
2.V.3. « Transformations. »
2.V.4. « Emploi des nombres complexes en géométrie », alinéas a), c) et d).
3.I.1. « Suites de nombres réels et de nombres complexes », alinéas a), b), d), e).
3.I.2. « Fonctions d'une variable réelle. »
3.II.2. « Dérivation », dans le cas des fonctions à valeurs réelles ou complexes.
3.II.3. « Intégration sur un intervalle compact », dans ce même cas.
3.II.4. « Étude locale de fonctions. »
3.IV.2. « Équations linéaires scalaires », alinéa b).
3.VI.1. « Courbes et surfaces », alinéa a).
4.2. « Variables aléatoires », alinéas a) et c).

ÉPREUVES ORALES SUR DOSSIER

Le programme est formé du titre A de l'annexe I.

UTILISATION DES CALCULATRICES

Circulaire du 16 Novembre 1999 n° 99-186 parue au BOÉN n° 42 du 25 novembre 1999.

ANNEXE I

A. Programmes de l'enseignement secondaire

1. La réunion des programmes de mathématiques des collèges et des lycées d'enseignement général et technologique en vigueur au 1er janvier de l'année du concours et de ceux en vigueur au 1er janvier de l'année précédente.
2. L'utilisation des calculatrices électroniques est défini par les arrêtés du 15 mai 1997 complétés par la circulaire n° 99-018 du 01-02-1999 parue au BOÉN n° 6 du 11-02-1999 ainsi que la circulaire du 16-11-1999.
Dans ce cadre, les candidats doivent se munir d'une calculatrice scientifique programmable, alphanumérique ou non, et graphique. Ils doivent savoir utiliser leur calculatrice dans les situations

numériques et algorithmiques liées au programme. Cet emploi combine les capacités suivantes, qui constituent un savoir-faire de base et sont seules exigibles :
– Savoir programmer une instruction d'affectation.
– Savoir effectuer les opérations arithmétiques sur les nombres et savoir comparer des nombres.
– Savoir utiliser les touches des fonctions qui figurent au programme et savoir programmer le calcul des valeurs d'une fonction d'une ou plusieurs variables permis par ces touches.
– Savoir programmer une instruction séquentielle, alternative ou itérative.
– Savoir afficher à l'écran la courbe représentative d'une fonction.
Ils doivent en outre munir leur calculatrice de programmes permettant :
– la recherche de solutions approchées d'une équation numérique à une variable ;
– le calcul de valeurs approchées d'une intégrale.

B. Programme complémentaire

Comme il est indiqué dans les instructions, les problèmes et les méthodes numériques et les aspects algorithmiques et informatiques (construction et mise en forme d'algorithmes, comparaison de leur performance, rédaction méthodique de programmes) sont largement exploités. Dans le texte du programme, ils sont représentés par le signe §.

1. NOTIONS SUR LA LOGIQUE ET LES ENSEMBLES

Aucun exposé de logique formelle n'est envisagé.

I. Généralités sur le langage et le raisonnement mathématiques. Éléments de logique.

Occurrences libres (ou parlantes) et occurrences liées (ou muettes) d'une variable dans une expression mathématique ; signes mutificateurs usuels ($\int \cdots \mathrm{d}\ldots$, $\sum$, $\mapsto$, $\{\cdots \mid \cdots\}$; $\forall$, $\exists$; etc.) ; mutifications implicites.

Calcul propositionnel : connecteurs logiques ; tables de vérité ; tautologies.

Utilisation des connecteurs et des quantificateurs dans le discours mathématique ; lien entre connecteurs logiques et opérations ou relations ensemblistes.

Pratique du raisonnement mathématique : hypothèses, conclusions, quelques figures usuelles du raisonnement (raisonnement par contraposition, par disjonction de cas, par l'absurde, utilisation d'exemples ou de contre-exemples, etc.) ; pour les énoncés sous forme d'implication, distinction entre condition nécessaire et condition suffisante, entre proposition directe et proposition réciproque ; cas particuliers de la recherche de lieux géométriques, d'ensembles de solutions d'équations.

II. Ensembles, relations, applications.

Opérations ensemblistes usuelles ; produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles. Relations et applications ; lois de composition internes ou externes.

Ensemble des parties d'un ensemble ; image directe ou image réciproque d'une partie par une application ; comportement des opérations d'image directe et d'image réciproque vis-à-vis des opérations ensemblistes.

Familles d'ensembles ; réunions et intersections « infinies ».

Relations d'ordre ; majorants, borne supérieure ...
Ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. Raisonnement par récurrence.

Relations d'équivalence ; classes d'équivalence, partition associée, ensemble quotient, compatibilité d'une loi de composition avec une relation d'équivalence (passage au quotient).

Construction de $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Q}$.

III. Rudiments de cardinalité.

Équipotence de deux ensembles ; classe des ensembles équipotents à un ensemble donné ; notion de cardinal.

Théorème de Cantor (« aucun ensemble n'est équipotent à l'ensemble de ses parties »).

Fonction caractéristique d'une partie d'un ensemble ; équipotence entre l'ensemble des parties d'un ensemble E et l'ensemble des applications de E dans $\{0, 1\}$.

Ensembles finis et infinis.

Ensembles dénombrables : exemples usuels ($\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, l'ensemble des suites finies d'entiers, l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes à coefficients rationnels, l'ensemble des nombres algébriques, etc.).

Puissance du continu (cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ou de $\mathbb{R}$) ; non dénombrabilité de $\mathbb{R}$.

2. ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

I. Nombres et structures

1. Groupes

a) Groupes, morphismes de groupes. Sous-groupes, sous-groupe engendré par une partie. Groupes cycliques. Ordre d'un élément ; théorème de Lagrange. Image et noyau d'un morphisme de groupes. Sous-groupes distingués, groupe quotient. Groupe opérant sur un ensemble, orbites. Éléments conjugués.

§ b) Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Cycles ; transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de cycles disjoints, en produit de transpositions. Signature d'une permutation, groupe alterné.

2. Anneaux et corps

Anneaux (unitaires), morphismes d'anneaux. Sous-anneaux.
Anneaux commutatifs, anneaux intègres ; idéaux, idéaux principaux ; anneaux quotients. Corps (commutatifs), sous-corps ; caractéristique d'un corps.

3. Structure des ensembles de nombres

a) Anneau $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs (ou rationnels). L'anneau $\mathbb{Z}$ est intègre ; divisibilité dans $\mathbb{Z}$. Division euclidienne ; sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$

Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont principaux ; théorème de Bézout.

§ b) Nombres premiers ; décomposition en facteurs premiers.

PGCD, PPCM ; algorithme d'Euclide.

c) Congruences ; anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, caractérisation des éléments inversibles.

d) Corps des rationnels, corps des réels, corps des complexes.

Il. Polynômes et fractions rationnelles

Dans ce chapitre, K désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$.

1. Polynômes à une indéterminée

§ a) Algèbre $K[X]$; degré d'un polynôme, terme dominant, polynôme unitaire.

L'anneau $K[X]$ est intègre ; divisibilité dans $K[X]$. Division euclidienne.

Les idéaux de $K[X]$ sont principaux ; théorème de Bézout.

Polynômes irréductibles ; décomposition en facteurs irréductibles.

PGCD, PPCM ; algorithme d'Euclide.

b) Fonctions polynômes

Racines (ou zéros) d'un polynôme, ordre de multiplicité. Polynômes scindés.

Correspondance entre polynômes et fonctions polynômes.

Équations algébriques. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé.

c) Dérivation des polynômes ; formule de Taylor.

d) Théorème de d'Alembert ; polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$. Factorisation des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Fractions rationnelles à une indéterminée

a) Corps $K(X)$; forme irréductible d'une fraction rationnelle non nulle.

b) Fonctions rationnelles : pôles, zéros ; ordre d'un pôle ou d'un zéro.

c) Décomposition en éléments simples. Cas du corps $\mathbb{C}$ et du corps $\mathbb{R}$.

d) Exemples simples de problèmes d'élimination.

III. Algèbre linéaire

Dans cette partie, K désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$

1. Espaces vectoriels

a) Espaces vectoriels. Applications linéaires, isomorphismes, endomorphismes, automorphismes. Formes linéaires. Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$, algèbre $\mathcal{L}(E)$, groupe linéaire $GL(E)$. Espace vectoriel produit d'une famille finie d'espaces vectoriels.

b) Sous-espaces vectoriels ; image et noyau d'une application linéaire. Sous-espace engendré par une partie. Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels, somme directe. Sous-espaces vectoriels supplémentaires, projecteurs.

c) Familles libres, familles génératrices, bases.

d) Étant donné une application linéaire u de E dans F et un supplémentaire E' de $\ker u$ dans E, u définit un isomorphisme de E' sur $\operatorname{im} u$.

2. Espaces vectoriels de dimension finie

a) Espaces admettant une famille génératrice finie. Théorème de la base incomplète, existence de bases ; dimension. Dimension d'un sous-espace, rang d'une famille de vecteurs. Existence de supplémentaires. Dimension d'une somme directe.

b) Rang d'une application linéaire ; formule du rang, caractérisation des isomorphismes.

c) Formes linéaires et hyperplans, équation d'un hyperplan.

d) Dualité. Bases associées d'un espace E et de son dual E^*. Orthogonal dans E^* d'une partie de E, orthogonal dans E d'une partie de E^* : dimension de l'orthogonal, double orthogonal.

3. Matrices

a) Espace vectoriel $M_{p,q}(K)$ des matrices à p lignes et q colonnes. Isomorphisme entre $\mathcal{L}(K^q, K^p)$ et $M_{p,q}(K)$. Produit matriciel, transposition. Algèbre $M_n(K)$; matrices inversibles, groupe linéaire $GL_n(K)$. Matrices symétriques, antisymétriques.

b) Matrice d'une application linéaire d'un espace vectoriel dans un autre, ces espaces étant munis de bases ; matrice d'un endomorphisme d'un espace vectoriel muni d'une base, matrice d'une famille finie de vecteurs relativement à une base. Matrice de passage (la matrice de passage de la base B à la base C est la matrice dont la j-ième colonne est formée des coordonnées dans B du j-ième vecteur de C). Effet d'un changement de base(s) sur la matrice d'une application linéaire.

c) Trace d'une matrice carrée, trace d'un endomorphisme.

d) Rang d'une matrice. Utilisation de matrices carrées extraites pour la détermination du rang. Matrices équivalentes. Caractérisation à l'aide du rang. Toute matrice M de rang r est équivalente à la matrice $I_r = (a_{ij})$, définie par les relations $a_{jj} = 1$ si $1 \leqslant j \leqslant r$, et $a_{ij} = 0$ dans tous les autres cas. Rang de la transposée d'une matrice.

e) Systèmes d'équations linéaires, rang. Conditions de compatibilité, systèmes de Cramer.

4. Applications multilinéaires, déterminants

a) Définition des applications multilinéaires, des applications symétriques, antisymétriques, alternées.

b) Formes n-linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n. Déterminant de n vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension n, critère d'indépendance.

c) Déterminant d'un endomorphisme, du composé de deux endomorphismes ; caractérisation des automorphismes.

d) Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant du produit de deux matrices, de la transposée d'une matrice. Mineurs, cofacteurs, développement par rapport à une ligne ou une colonne.

e) Applications des déterminants, expression de l'inverse d'une matrice carrée inversible, formules de Cramer ; orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

f) En relation avec la géométrie, application des déterminants à l'étude des systèmes linéaires de deux ou trois équations à deux ou trois inconnues.

5. Calcul matriciel

§ a) Exemples de calculs par blocs. Exemples d'emploi de normes matricielles. Conditionnement d'une matrice.

§ b) Opérations élémentaires sur les lignes (ou les colonnes) d'une matrice ; addition d'un multiple d'une ligne à une autre, multiplication d'une ligne par un scalaire non nul, échange de deux lignes. Applications à la résolution des systèmes linéaires, au calcul de déterminants, à l'inversion des matrices carrées et au calcul du rang.

Algorithme du pivot de Gauß ; pivot partiel, pivot total.

6. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Dans ce paragraphe, le corps de base est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Sous-espaces stables par un endomorphisme. Si u et v commutent, $\operatorname{im} u$ et $\ker u$ sont stables par v. Polynômes d'un endomorphisme ; théorème de décomposition des noyaux : si P et Q sont premiers entre eux, $\ker PQ(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$.

b) Valeurs propres d'un endomorphisme, sous-espaces propres, vecteurs propres.

c) Réduction d'un endomorphisme en dimension finie.

Polynôme annulant un endomorphisme ; lien avec le spectre.

Polynôme caractéristique, ordre de multiplicité d'une valeur propre. Théorème de Cayley–Hamilton.

Endomorphismes diagonalisables ; l'espace est somme directe des sous-espaces propres. Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé et a toutes ses racines simples est diagonalisable. Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il annule un polynôme scindé dont toutes les racines sont simples.

Sous-espaces caractéristiques. Tout endomorphisme u dont le polynôme caractéristique est scindé peut être trigonalisé : l'espace est somme directe des sous-espaces caractéristiques F_j et il existe une base de chaque F_j telle que la matrice dans cette base de l'endomorphisme induit par u soit triangulaire supérieure ; en outre, la dimension de F_j est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_j. Un tel endomorphisme u s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $u = d + n$, où d est diagonalisable, n est nilpotent, et $nd = dn$.

§ d) Valeurs propres d'une matrice carrée, vecteurs (colonnes) propres. Matrices semblables. Diagonalisation, trigonalisation des matrices carrées. Exemples d'emploi de décomposition en blocs (produits, matrices diagonales par blocs, triangulaires par blocs).

IV. Espaces euclidiens, espaces hermitiens

(Cf. analyse 3.I.6 espaces préhilbertiens réels ou complexes.)

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.

1. Espaces euclidiens

a) Isomorphisme canonique avec le dual.

Sommes directes orthogonales. Dimension de l'orthogonal d'un sous-espace, normale à un hyperplan. Projecteurs et symétries orthogonales.

b) Adjoint d'un endomorphisme ; matrice associée dans une base orthonormale.

Endomorphismes symétriques, antisymétriques.

c) Automorphismes orthogonaux. Groupe orthogonal $O(E)$, groupe des rotations (ou spécial orthogonal) $SO(E)$. Matrices orthogonales. Groupes $O(n)$ et $SO(n)$. Matrice associée à un automorphisme orthogonal dans une base orthonormale.

Changements de base orthonormale.

d) Déterminant de n vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n.

2. Géométrie vectorielle euclidienne

a) Les réflexions engendrent le groupe orthogonal $O(E)$.

b) Dans le plan euclidien orienté ($n = 2$) : matrice d'une rotation ; angle d'une rotation. Morphisme canonique de $\mathbb{R}$ sur $SO(2)$.

Classification des automorphismes orthogonaux à partir du sous-espace des points invariants.

c) Dans l'espace euclidien orienté ($n = 3$) :

Axe et angle d'une rotation. Les demi-tours engendrent $SO(3)$.

Classification des automorphismes orthogonaux à partir du sous-espace des points invariants.

d) En dimension 2 ou 3 : groupe des similitudes ; similitudes directes. Rapport d'une similitude, automorphisme orthogonal associé.

e) Produit vectoriel en dimension 3 ; expression dans une base orthonormale directe.

3. Espaces hermitiens

a) Sommes directes orthogonales. Projecteurs orthogonaux.

b) Adjoint d'un endomorphisme ; matrice associée dans une base orthonormale.

Endomorphismes hermitiens, matrices hermitiennes.

c) Automorphismes unitaires. Groupe unitaire $U(E)$. Groupe $U(n)$ des matrices unitaires d'ordre n.

4. Calcul matriciel et normes euclidiennes

§ a) Calcul de la projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace et de la distance d'un point à un sous-espace. Application aux problèmes de moindres carrés ; minimisation de $\|AX - B\|^2$, où $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et rang $A = p$.

§ b) Décomposition d'un élément M de $GL_n(\mathbb{R})$ sous la forme $M = QR$, où Q est orthogonale et R est triangulaire supérieure, par la méthode de Householder.

5. Réduction des endomorphismes symétriques et des endomorphismes hermitiens

§ a) Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique (resp. hermitien) dans une base orthonormale.

Diagonalisation d'une matrice symétrique (resp. hermitienne) au moyen d'une matrice orthogonale (resp. unitaire).

La plus grande valeur propre d'une matrice symétrique A est égale à $\sup\limits_{X \neq 0} \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX}$

b) Formes bilinéaires symétriques sur un espace euclidien, formes quadratiques, polarisation. Endomorphisme symétrique associé à une forme quadratique ; réduction dans une base orthonormale.

V. Géométrie affine et euclidienne

Dans ce chapitre, l'étude est placée dans le plan et l'espace.

1. Calcul barycentrique ; repérage

a) Sous-espaces affines ; direction d'un sous-espace affine.

b) Repères affines, coordonnées barycentriques.

c) Parties convexes.

d) Repères cartésiens, polaires, cylindriques et sphériques. Changement de repère orthonormal.

2. Configurations

a) Position relative de deux plans dans l'espace. Plans perpendiculaires. Plan médiateur d'un segment.

b) Cercles dans le plan. Puissance d'un point par rapport à un cercle. Ensemble des points M dont le rapport des distances à deux points A et B est constant, ou tels que l'angle de droites (ou de demi-droites) (MA, MB) soit constant.

c) Sphères. Intersection d'une sphère et d'un plan, de deux sphères.

d) Coniques. Définitions focales, bifocales ; tangente et normale en un point ; ellipse déduite d'un cercle par affinité orthogonale ; hyperbole rapportée à ses asymptotes. Équation cartésienne d'une conique ; réduction en repère orthonormal. Représentations paramétriques d'une conique. Équation polaire d'une conique dont un foyer est à l'origine, la directrice associée et l'excentricité étant données.

3. Transformations

a) Applications affines ; effets sur la barycentration et sur la convexité. Application linéaire associée. Projections, affinités, symétries.

b) Groupe des transformations affines. Morphisme canonique du groupe affine sur le groupe linéaire ; groupe des translations, groupe des homothéties-translations. Isomorphisme canonique du stabilisateur d'un point O sur le groupe linéaire.

c) Groupe des isométries, groupe des déplacements. Les réflexions engendrent le groupe des isométries ; dans l'espace, les demi-tours engendrent le groupe des déplacements.

Similitudes planes directes et indirectes.

d) Classification des déplacements et des isométries du plan et des déplacements de l'espace à partir de l'ensemble des points invariants.

e) Exemples de recherche du groupe des isométries laissant globalement invariante une configuration du plan ou de l'espace. Exemples de recherche de transformations affines transformant une configuration en une autre.

4. Emploi des nombres complexes en géométrie

a) Racines de l'unité et polygones réguliers.

b) Adjonction d'un point à l'infini au plan complexe.

c) Transformations $z \longmapsto a\overline{z} + b$ et $z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$

§ d) Lignes de niveau des fonctions $z \mapsto z - a$, $z \mapsto \mathrm{Arg}(z - a)$, $z \mapsto \left|\frac{z-a}{z-b}\right|$ et $z \mapsto \mathrm{Arg}\,\frac{z-a}{z-b}$.

Exemples de familles de courbes orthogonales associées à des transformations simples du plan complexe.

3. ANALYSE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

I. Suites et fonctions

1. Suites de nombres réels et de nombres complexes

a) Suites convergentes, divergentes ; suites extraites.

Opérations algébriques sur les limites. Relations de comparaison : domination (u est dominée par v), prépondérance (u est négligeable devant v) et équivalence (u est équivalente à v). Notations $u = O(v), u = o(v)$ ou $u \ll v$, et $u \sim v$.

b) Toute partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Toute suite croissante majorée de nombres réels converge. Suites adjacentes. Développement décimal d'un nombre réel. Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

c) Toute suite de Cauchy de nombres réels ou complexes converge. De toute suite bornée de nombres réels ou complexes, on peut extraire une suite convergente. Théorème du point fixe pour une application contractante d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ dans lui-même.

§ d) Étude du comportement asymptotique de suites. Approximation d'un nombre réel ou complexe au moyen de suites : rapidité de convergence et performance d'un algorithme. Accélération de convergence : méthode de Richardson–Romberg.

§ e) Exemples d'étude de suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et par une condition initiale.

Approximation d'une solution d'une équation numérique. Méthode de dichotomie. Méthode des approximations successives ; méthodes de Newton, d'interpolation linéaire et d'ajustement linéaire.

2. Fonctions d'une variable réelle

Les fonctions étudiées dans ce paragraphe sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes.

a) Limite d'une fonction en un point ; continuité en un point. Opérations sur les limites et sur les fonctions continues. Image d'une suite convergente par une fonction continue.

Comparaison des fonctions au voisinage d'un point domination, prépondérance et équivalence.

b) Image d'un intervalle par une fonction continue, image d'un segment. Continuité de la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle.

3. Espaces vectoriels normés, réels ou complexes

Les applications étudiées dans ce paragraphe sont définies sur une partie d'un espace vectoriel normé et à valeurs dans un espace vectoriel normé.

a) Normes sur un espace vectoriel réel ou complexe.

Norme, distance associée, boules. Parties bornées, diamètre d'une partie.

Distance d'un point à une partie non vide. Applications lipschitziennes. Produit d'une famille finie d'espaces normés.

Exemples de normes usuelles sur les espaces de suites et de fonctions.

b) Voisinages d'un point d'un espace vectoriel normé, ouverts, fermés ; adhérence, intérieur et frontière d'une partie, parties denses, points isolés, points d'accumulation.

Distance induite sur une partie ; voisinages d'un point, ouverts et fermés d'une partie.

c) Limite d'une application suivant une partie, continuité en un point.

Applications continues, caractérisation par image réciproque des ouverts ou des fermés. Continuité d'une application composée ; homéomorphismes. Applications uniformément continues.

d) Suites convergentes, divergentes. Caractérisation des points adhérents et des applications continues à l'aide de suites.

e) Caractérisation des applications linéaires continues, norme d'une application linéaire continue. Normes équivalentes.

Exemples de normes matricielles.

f) Opérations algébriques sur les limites. Algèbre des fonctions numériques continues.

Algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, base canonique de cette algèbre.

4. Espaces complets

a) Suites de Cauchy, espaces complets ; $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont complets. Parties complètes ; les parties complètes d'un espace complet sont les parties fermées.

b) Séries d'éléments d'un espace vectoriel normé. Séries convergentes, divergentes, absolument convergentes (c'est-à-dire telles que $\sum \|u_n\| < +\infty$). Dans un espace de Banach, critère de Cauchy pour la convergence d'une série, convergence des séries absolument convergentes.

c) Théorème du point fixe pour les contractions d'une partie fermée d'un espace complet.

d) Critère de Cauchy pour les applications (existence d'une limite en un point).

5. Espaces vectoriels de dimension finie

a) Équivalence des normes. Toute suite de Cauchy est convergente. De toute suite bornée on peut extraire une suite convergente. Continuité des applications linéaires et multilinéaires.

b) Définition (séquentielle) des parties compactes. Les parties compactes sont les parties fermées bornées.

Image continue d'un compact, application aux fonctions numériques. Continuité uniforme d'une application continue sur un compact.

6. Espaces préhilbertiens réels ou complexes

Produit scalaire (dans le cas complexe, linéaire à droite, semi-linéaire à gauche), norme associée, inégalité de Cauchy–Schwarz, identité du parallélogramme.

Théorème de Pythagore. Famille orthonormale, méthode de Schmidt.

Existence d'une base orthonormale dans un espace de dimension finie. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, distance à un tel sous-espace.

Exemples de suites de polynômes orthogonaux.

7. Suites d'applications à valeurs dans un espace de Banach

Convergence simple, convergence uniforme. Pour des applications définies sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$: convergence uniforme sur tout compact. Continuité et limite d'une application définie comme limite d'une suite uniformément convergente.

Critère de Cauchy de convergence uniforme. l'espace des applications bornées d'un ensemble dans un espace de Banach, muni de la norme uniforme, est complet. Il en est de même pour l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues d'un espace normé dans un espace de Banach.

8. Notions sur la connexité

Parties connexes ; les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. Image d'une partie connexe par une application continue, théorème des valeurs intermédiaires. Connexité par arcs ; elle implique la connexité et, dans le cas d'un ouvert d'un espace vectoriel normé, elle lui équivaut.

II. Fonctions d'une variable réelle : calcul différentiel et intégral

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle non réduit à un point et à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.

1. Approximation des fonctions sur un segment

Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier ; approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions continues affines par morceaux et par des fonctions polynomiales. Interpolation de Lagrange.

2. Dérivation

a) Opérations sur les dérivées : linéarité, produit, quotient, fonctions composées, fonctions réciproques.

b) Inégalité des accroissements finis pour une fonction continue sur un intervalle et dérivable sur son intérieur ; caractérisation des fonctions constantes et des fonctions lipschitziennes. Prolongement des fonctions de classe C^1 sur un intervalle privé d'un point.

c) Extrémums locaux des fonctions dérivables à valeurs réelles. Théorème de Rolle.

d) Fonction de classe C^k (k entier naturel ou k infini) Si deux fonctions sont de classe C^k, leur composée l'est encore. Caractérisation des C^k-difféomorphismes parmi les fonctions de classe C^k. Formule de Leibniz. Définition des fonctions de classe C^k par morceaux : une fonction f est dite de classe C^k par morceaux sur un segment $[a, b]$ s'il existe une suite finie strictement croissante $a_0 = a, a_1, \ldots, a_n = b$ telle que la restriction de f à chacun des $]a_i, a_{i+1}[$ soit prolongeable en une fonction de classe C^k sur $[a_i, a_{i+1}]$; elle est dite de classe C^k par morceaux sur un intervalle quelconque si sa restriction à tout segment est de classe C^k par morceaux.

e) Fonctions à valeurs réelles : fonctions convexes. Caractérisation des fonctions convexes de classe C^1 par la croissance de la dérivée première et par la position de la courbe par rapport aux tangentes.

3. Intégration sur un intervalle compact

Les seules connaissances exigibles portent sur l'intégration des fonctions continues par morceaux.

a) Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment. Pour les fonctions à valeurs réelles, croissance de l'intégrale.

b) Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

Notations : $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$; $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Linéarité. Si $a \leqslant b$, $\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$.

Pour les fonctions à valeurs réelles, croissance de l'intégrale.

Pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes, inégalité de Cauchy–Schwarz.

c) Additivité par rapport à l'intervalle d'intégration. Approximation de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$ par des sommes de Riemann associées à des subdivisions de $[a, b]$.

d) Primitives d'une fonction continue sur un intervalle. Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral : soit f une fonction continue sur I ; pour tout point a de I, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant au point a ; inversement, pour toute primitive F de f sur I, et pour tout couple (a, b) de points de I, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$. En particulier, pour toute fonction g de classe C^1 sur I, et pour tout couple (a, b) de points de I, $g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t)\,\mathrm{d}t$.

Intégration par parties, changement de variable.

Exemples de calculs de primitives.

e) Inégalité des accroissements finis relative à un couple de fonctions de classe C^1, l'une vectorielle, l'autre réelle. Formule de Taylor à l'ordre p avec reste intégral pour une fonction de classe C^{p+1} ; inégalité de Taylor–Lagrange.

§ f) Calcul des valeurs approchées d'une intégrale. Méthode du milieu (ou des tangentes). Méthode des trapèzes, méthode de Simpson : majoration du reste. Algorithmes d'approximation d'une intégrale par ces deux méthodes.

4. Étude locale des fonctions

a) Développements limités, opérations sur les développements limités.

b) Exemples simples de développements asymptotiques.

Intégration des relations de comparaison au voisinage d'un point entre des fonctions continues ; intégration des développements limités. Théorème de Taylor–Young (existence d'un développement limité d'ordre p pour une fonction de classe C^p).

5. Fonctions usuelles

a) Fonctions exponentielles et logarithmes, fonctions puissances, fonctions hyperboliques directes et réciproques.

b) Fonctions circulaires directes et réciproques. Fonction $t \longmapsto e^{at}$, où a est complexe.

c) Équations fonctionnelles des fonctions linéaires, exponentielles ; logarithmes et puissances.

6. Intégrales impropres

a) Intégrales convergentes, divergentes ; critère de Cauchy. Convergence absolue. Emploi de l'intégration par parties.

b) Intégrales de fonctions positives. Emploi des relations de comparaison pour l'étude de la convergence. Intégration des relations de prépondérance et d'équivalence au voisinage de $+\infty$: cas des intégrales convergentes, cas des intégrales divergentes.

7. Intégrales dépendant d'un paramètre

a) Passage à la limite uniforme dans les intégrales de fonctions continues sur un segment : application à la dérivation de la limite d'une suite de fonctions de classe C^1.

Exemples de passage à la limite dans les intégrales impropres.

b) Continuité et intégration des fonctions de la forme $x \longmapsto \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$, où f est continue ; dérivation lorsqu'en outre $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue.
Exemples d'étude de fonctions définies par des intégrales.

c) Convergence en moyenne, en moyenne quadratique : normes associées.

III. Séries

1. Séries de nombres réels ou complexes

a) Séries à termes positifs. Emploi des relations de comparaison pour l'étude de la convergence. Sommation des relations de prépondérance et d'équivalence ; cas des séries convergentes, cas des séries divergentes.

Comparaison à une série géométrique : règles de Cauchy et de d'Alembert.

Comparaison à une intégrale impropre, Convergence des séries de Riemann ; comparaison à une série de Riemann.

b) Séries à termes réels ou complexes. Convergence d'une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers zéro ; majoration du reste.

Exemples d'emploi de la transformation d'Abel. Exemples d'emploi d'un développement asymptotique du terme général.

c) Somme de deux séries, produit d'une série par un scalaire. Série produit de deux séries absolument convergentes : $w_n = \displaystyle\sum_{p+q=n} u_p v_q$.

d) Exemples d'encadrement ou d'évaluation asymptotique des restes d'une série convergente, des sommes partielles d'une série divergente.

§ e) Recherche de valeurs approchées de la somme d'une série convergente.

2. Séries de fonctions

Les fonctions considérées dans ce paragraphe sont à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.

a) Convergence simple, convergence uniforme sur un ensemble d'une série de fonctions ; convergence normale (pour la norme uniforme).

b) Continuité et limite en un point de la somme d'une série uniformément convergente. Intégration terme à terme d'une série uniformément convergente de fonctions continues sur un segment ; application à la dérivation terme à terme d'une série de fonctions de classe C^1.

c) Exemples d'étude de fonctions définies par des séries.

3. Séries entières

Les coefficients des séries entières considérées dans ce paragraphe sont réels ou complexes.

a) Séries entières d'une variable complexe ; rayon de convergence, disque (ouvert) de convergence, convergence normale sur tout compact du disque de convergence.

b) Séries entières d'une variable réelle : intégration et dérivation terme à terme dans l'intervalle (ouvert) de convergence.

Développement en série entière de $e^x, \ln(1+x)$ et $(1+x)^\alpha$ où α est réel.

c) Définition de $\exp z$ (ou e^z), $\cos z$ et $\sin z$ pour z complexe.

Exponentielle d'une somme, extension des formules de trigonométrie.

4. Séries de Fourier

a) Polynômes trigonométriques ; orthogonalité des fonctions $x \longmapsto e^{inx}$. Coefficients et série de Fourier d'une fonction f 2π-périodique continue par morceaux à valeurs complexes (expression sous forme exponentielle, expression en cosinus et sinus). Sommes partielles $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(f)e^{ikx}$ de la série de Fourier de f ; propriété de meilleure approximation en moyenne quadratique.

b) Lorsque f est continue par morceaux, convergence de S_n vers f en moyenne quadratique ; formule de Parseval. Théorème de Dirichlet ; convergence de $S_n(x)$ vers la demi-somme des limites à droite et à gauche de f au point x lorsque f est de classe C^1 par morceaux. Convergence normale de la série de Fourier d'une fonction continue et de classe C^1 par morceaux.

5. Emploi des séries entières et des séries de Fourier

Exemples de recherche de développements en série entière ou en série de Fourier de fonctions d'une variable réelle.

§ Exemples d'utilisation de tels développements pour obtenir des valeurs approchées d'une fonction.

Exemples d'emploi de séries entières pour la recherche de solutions d'équations différentielles.

IV. Équations différentielles

1. Systèmes linéaires d'ordre 1

a) Écriture matricielle $X' = A(t)X+B(t)$ où A (respectivement B) désigne une application continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $M_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathbb{C}^n$). Existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy (théorème admis). Dimension de l'espace vectoriel des solutions sur I de l'équation $X' = A(t)X$. Méthode de variation des constantes.

b) Systèmes à coefficients constants : exponentielle d'un endomorphisme ; application au problème de Cauchy. Résolution du système $X' = AX$ par réduction de A à une forme diagonale ou triangulaire.

2. Équations linéaires scalaires

a) Équation $X''+a(t)X'+b(t)X = c(t)$, où a, b, c sont continues sur I à valeurs réelles ou complexes. Système d'ordre 1 associé, étude du problème de Cauchy ; solutions de l'équation sans second membre, méthode de variation des constantes. Expression des solutions dans le cas où l'on connaît une solution de l'équation sans second membre associée ne s'annulant pas sur I.

b) Équations linéaires à coefficients constants. Dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène. Cas où le second membre est une exponentielle polynôme.

3. Notions sur les équations non linéaires

a) Solutions d'une équation différentielle $X' = f(t, X)$ (resp. $X'' = f(t, X, X')$), où f est de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{R}^3$). Existence et unicité d'une solution maximale du problème de Cauchy.

§ b) Recherche de solutions approchées d'une équation différentielle scalaire d'ordre 1 par la méthode d'Euler.

c) Résolution des équations des types suivants (en liaison avec la géométrie) : équation associée à une forme différentielle exacte, équation à variables séparables, équation homogène : $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$

d) Exemples d'emploi de changements de variable ou de fonction (en liaison avec des propriétés d'invariance), d'échange de la variabIe et de la fonction, de paramétrages.

§ e) Exemples d'étude qualitative des courbes intégrales d'une équation différentielle. Exemples de recherche des courbes intégrales d'un champ d'éléments de contact ou d'un champ de vecteurs dans le plan.

V. Notions sur les fonctions de plusieurs variables réelles

1. Calcul différentiel

Les fonctions considérées dans ce paragraphe sont définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

a) Limite, continuité, dérivée selon un vecteur, dérivées partielles. Applications de classe C^1 (ou continûment différentiables).

b) Développement limité à l'ordre 1 d'une application de classe C^1 ; différentielle, matrice jacobienne, jacobien. Si deux applications sont de classe C^1, leur composée l'est encore ; difféomorphismes. Matrice jacobienne d'une application composée ou d'une application réciproque (les applications considérées étant de classe C^1). Caractérisation des difféomorphismes parmi les applications injectives de classe C^1. Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe C^1 ; caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe.

c) Dérivées partielles d'ordre k ; théorème de Schwarz. Définition des applications de classe C^k sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (k entier naturel ou k infini). Si deux applications sont de classe

C^k, leur composée l'est encore ; définition des C^k-difféomorphismes.

d) Gradient d'une fonction numérique de classe C^1, points critiques. Formule de Taylor–Young pour une fonction numérique de classe C^1. Étude de l'existence d'un extrémum local (c'est-à-dire d'un maximum local ou d'un minimum local) d'une fonction numérique de deux variables de classe C^2 en un point critique où $rt - s^2 \neq 0$.

2. Calcul intégral

Aucune difficulté théorique ne peut être soulevée sur les notions de ce paragraphe.

a) Champs de vecteurs. Divergence, rotationnel. Intégrales curvilignes. Potentiel scalaire ; condition nécessaire et suffisante d'existence pour un champ de classe C^1 sur un ouvert étoilé.

b) Intégrales doubles et intégrales triples. Linéarité, croissance ; additivité par rapport aux ensembles. Calcul par intégrations successives. Changements de variables ; passage en coordonnées polaires, cylindriques ou sphériques. Exemples de calculs d'aires planes et de volumes.

VI. Notions de géométrie différentielle

1. Courbes et surfaces

l'étude théorique est placée dans des hypothèses très larges. Toutes les formes du théorème des fonctions implicites utiles pour ce paragraphe sont admises.

a) Définitions diverses d'une courbe (plane ou non) et d'une surface, par paramétrages ou par équations.

b) En un point régulier : tangente à une courbe, plan normal ; plan tangent à une surface, normale. Tangente à l'intersection de deux surfaces en un point où les plans tangents sont distincts.

c) Étude locale d'une courbe paramétrée plane : position de la courbe par rapport à une droite ; concavité en un point birégulier, rebroussements, inflexions. Étude de branches infinies. Construction de courbes paramétrées.

d) Étude locale d'une courbe paramétrée de l'espace : plan osculateur en un point birégulier, étude locale en un point trirégulier.

e) Enveloppe d'une famille de droites dans le plan, donnée par une équation $a(t)x+b(t)y+c(t) = 0$, sur un intervalle où $ab' - ba'$ ne s'annule pas.

f) Étude des courbes planes définies par des coordonnées polaires : étude locale, comportement asymptotique, construction.

2. Propriétés métriques des courbes planes

Longueur d'un arc paramétré de classe C^1, abscisse curviligne. Pour un arc birégulier du plan orienté, repère de Frenet, courbure, centre de courbure, développée, développantes.

3. Cinématique du point

a) Vitesse, accélération. Trajectoire, loi horaire. Moment cinétique, dynamique. Énergie cinétique.

b) Exemples de mouvements. Mouvements rectilignes, mouvements circulaires. Mouvements à accélération centrale ; oscillateurs harmoniques, mouvement des planètes.

4. Probabilités et statistiques

1. Espaces probabilisés Expériences aléatoires. Événements. Parallèle entre le vocabulaire probabiliste et le vocabulaire ensembliste à propos des opérations sur les événements.

Tribus. Probabilités. Espace probabilisé (Ω, A, P). Probabilités conditionnelles. Formule des probabilités totales ; formule de Bayes. Indépendance (en probabilité) d'événements ; indépendance mutuelle d'un nombre fini d'événements ; indépendance deux à deux.

Les candidats devront savoir utiliser sur des exemples simples la formule donnant la probabilité d'une réunion finie d'événements (formule de Poincaré, ou de crible). La théorie des espaces probabilisés produits n'est pas au programme. Aucune difficulté théorique ne doit être soulevée sur les espaces probabilisés.

2. Variables aléatoires

Définition d'une variable aléatoire réelle, ou plus généralement à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Événements liés à une variable aléatoire. On admettra que la somme et le produit de deux variables aléatoires sont des variables aléatoires. Les propriétés générales des variables aléatoires sont hors programme. L'objectif est la mise en fonctionnement de ce concept sur les exemples décrits dans les trois alinéas qui suivent. La tribu borélienne de $\mathbb{R}$ n'est pas au programme.

a) Variables aléatoires réelles discrètes.

Loi de probabilité. Fonction de répartition $F(x) = P[X \leqslant x]$. Moments : espérance (ou moyenne), moment d'ordre 2, variance, écart-type. Variables centrées, variables réduites. Variable aléatoire $y = g(X)$ fonction d'une variable aléatoire discrète X, où g est définie sur l'ensemble des valeurs de X. Lois discrètes usuelles : loi uniforme, de Bernoulli, binomiale, hypergéométrique, géométrique, de Poisson.

b) Vecteurs aléatoires (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) discrets.

Loi de probabilité d'un vecteur à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Lois marginales. Lois conditionnelles. Indépendance de deux variables aléatoires réelles. Loi de probabilité d'un vecteur à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Indépendance de n variables aléatoires réelles. Linéarité de l'espérance mathématique. Espérance mathématique du produit de deux variables aléatoires indépendantes. Variance d'une somme de variables aléatoires. Covariance. Coefficient de corrélation linéaire. Stabilité pour la somme des lois binomiales, des lois de Poisson.

Dans de nombreuses situations, on rencontre des exemples simples de fonctions de plusieurs variables aléatoires (sommes, produits). On admettra que si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, toute fonction de $(X_1, \ldots, X_p)$ est indépendante de toute fonction de $(X_{p+1}, \cdots, X_n)$. Aucune théorie générale des fonctions de plusieurs variables aléatoires n'est au programme.

c) Variables aléatoires à densité.

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs réelles admet une densité f si sa fonction de répartition peut s'écrire sous la forme $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est une fonction à valeurs réelles positives ayant un nombre fini de points de discontinuité et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Moments, espérance (ou moyenne), moment d'ordre 2, variance, écart-type. Variable centrées, variables réduites. Exemples simples de fonctions d'une variable aléatoire (tels que $aX + b$, X^2, e^X, …). Lois définies par une densité usuelle : loi uniforme, exponentielle, normale (ou de Laplace–Gauß). Densité d'un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Indépendance de deux variables aléatoires réelles à densité. Aucune difficulté théorique ne doit être soulevée sur ces questions.

3. Convergence des suites de variables aléatoires. Inégalité de Bienaymé–Tchebychev (cas des variables discrètes et des variables à densité). Convergence en probabilité. Loi faible des grands nombres. Approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale. Approximation de la loi binomiale par la loi de Gauß, par la loi de Poisson.

Énoncé du théorème limite central.

L'étude de la convergence en loi n'est pas au programme.

4. Notions de statistiques.

a) Statistique descriptive : paramètres de position (moyenne, médiane, quantiles, modes) et de dispersion (écart-type, variance). Divers modes de représentation graphique.

b) Échantillons. Intervalle de confiance d'une moyenne ou d'une fréquence.

c) Tests d'hypothèse ; les deux types de risque d'erreur.

d) Tests de paramètres : estimation du paramètre d'une loi binomiale, de la moyenne m d'une loi normale. Test unilatéral, bilatéral.

Comparaison de deux moyennes.

ANNEXE II

Instructions et commentaires

Ils figurent au BOÉN n° 33 du 26 septembre 1991 et au BO Spécial n° 5 du 21 octobre 1993.

Pour les épreuves écrites les candidats doivent se munir de calculatrice afin de s'en servir lorsque ce sera autorisé.

Pour les épreuves orales les calculatrices personnelles sont interdites. Pour les sujets qui en nécessiteraient l'usage, les candidats pourront en emprunter une à la bibliothèque du CAPES.

1.3 Statistiques

1.3.1 Evolution et résultats généraux

Année	Postes	Inscrits	Présents aux deux épreuves écrites	Admissibles	Présents aux deux épreuves orales	Admis
CAPES 2001	990	6972	5676	2109	1946	990 *
CAFEP 2001	215	1095	889	200	194	113
CAPES 2002	1125	6166	4948	2213	2065	1125 *
CAFEP 2002	230	906	745	192	189	118
CAPES 2003	1195	5755	4428	2328	2174	1195
CAFEP 2003	230	846	636	214	209	116
CAPES 2004	1003	5604	4194	2040	1900	1003
CAFEP 2004	177	933	658	205	192	103
CAPES 2005	1310	6086	4074	2473	2236	1310
CAFEP 2005	177	1051	644	279	265	139
CAPES 2006	952	5787	3983	2043	1796	952
CAFEP 2006	135	1096	689	283	265	126
CAPES 2007	952	5388	3875	2102	1840	952
CAFEP 2007	160	1019	693	267	250	123
CAPES 2008	806	4711	3453	1802	1564	806
CAFEP 2008	155	964	631	200	191	90

** En 2001 et 2002, des listes complémentaires avaient été publiées.*

Les abandons à l'oral :

Le pourcentage de candidats admissibles ne s'étant pas présentés aux épreuves orales est sensiblement le même qu'en 2007. Il est d'environ 11,8 %. Nous n'avons pas mené d'enquête exhaustive auprès des candidats abandonnant de cette manière, mais il y a eu des contacts téléphoniques assez nombreux. Avec les renseignements statistiques disponibles, nous avons pu dégager quelques tendances.
D'abord, il faut tenir compte des candidats d'un bon niveau et simultanément admissibles au CAPES et à l'agrégation. Certains ont démissionné car ils savaient déjà avant la fin du CAPES qu'ils étaient reçus à l'agrégation. D'autres préfèrent continuer le cas échéant à se préparer à l'agrégation plutôt que de tenter d'être reçus au CAPES, auquel ils se sont inscrits sans réelle motivation.
Une fois ces candidats écartés, on est surpris par la régularité des chiffres donnant le taux de non-participation à l'oral en fonction du rang d'écrit : de nombreux candidats se sentent insuffisamment préparés aux épreuves orales, et ceci indépendamment de leurs capacités telles que l'écrit a permis de les mesurer. Enfin, les femmes et les hommes se comportent très différemment :

admissibles absents à une ou deux épreuves orales	CAPES	CAFEP
femmes	10,1 %	0 %
hommes	15,6 %	9,6 %

1.3.2 Résultats par catégories

Sont considérés comme présents les candidats qui ont des notes non nulles à toutes les épreuves écrites.
Les candidats aux concours étrangers gérés par le jury ne sont pas comptabilisés.
Les candidats étrangers aux concours français sont comptés normalement.

CAPES EXTERNE MATHÉMATIQUES

	Inscrits	Présents	admissibles	Admis
Ensemble	4711	3453	1802	806
Femmes	2091	1635	776	368
Français et U.E.	4693	3444	1799	806
Union Européenne	21	14	9	5
Étrangers hors UE	18	9	3	0
Moins de 30 ans	3542	2943	1595	725
Moins de 25 ans	2280	2068	1227	599

Professions				
	I	P	a	A
DIVERS	597	224	101	34
ELEV.IUFM.1ANN.	1773	1681	864	474
ETUDIANT	967	761	550	216
SECT.TERTIAIRE	89	42	14	6
SANS EMPLOI	401	214	104	37
VAC.2ND DEGRE	108	74	27	10
MA	74	36	13	1
CONT.2ND DEGRE	344	180	44	8
ASSISTANT EDUC.	358	241	85	20

catégories				
	I	P	a	A
DIVERS	1918	1736	895	481
ETUDIANT	967	761	550	216
ENS.TIT.MEN	116	44	16	5
AG.NON TIT.MEN	975	580	186	47
HORS FP SS EMPL	735	332	155	57

CAFEP CAPES-PRIVÉ MATHÉMATIQUES

	Inscrits	Présents	admissibles	Admis
Ensemble	964	631	200	90
Femmes	519	367	106	53
Moins de 30 ans	607	464	154	73
Moins de 25 ans	287	251	99	51

Professions				
	I	P	a	A
DIVERS	82	32	7	3
ELEV.IUFM.1ANN.	246	224	86	50
ETUDIANT	116	79	36	16
CADRE CONV.COL	29	7	6	3
SECT.TERTIAIRE	18	8	3	2
SANS EMPLOI	75	29	7	3
FORMATEUR PRIVE	15	5	1	0
ENS.FPE NON.TIT	7	4	3	1
MAIT-DOC REM MA	11	9	1	0
VAC.2ND DEGRE	36	26	8	2
MA	235	165	33	6
CONT.2ND DEGRE	65	32	7	4
ASSISTANT EDUC.	29	11	2	0

catégories				
	I	P	a	A
DIVERS	253	227	86	50
ETUDIANT	116	79	36	16
ENS.TIT.MEN	22	7	2	0
AG.NON TIT.MEN	384	245	52	14
ENSEIGN PRIVE	27	14	1	0
AG.FONC.PUB.ETA	13	6	3	1
HORS FP SS EMPL	149	53	20	9

1.3.3 Résultats par académie

CAPES EXTERNE MATHÉMATIQUES

Académies				
	I	P	a	A
AIX MARSEILLE	249	166	78	29
BESANCON	85	72	41	17
BORDEAUX	197	158	107	54
CAEN	120	98	48	21
CLERMONTFERRAND	82	67	30	15
DIJON	85	69	30	16
GRENOBLE	186	139	81	43
LILLE	378	291	160	61
LYON	240	184	116	54
MONTPELLIER	145	100	48	23
NANCY METZ	171	129	73	41
POITIERS	123	105	65	33
RENNES	216	188	89	42
STRASBOURG	169	132	73	28
TOULOUSE	250	185	102	46
NANTES	186	138	77	39
ORLEANS TOURS	137	108	44	18
REIMS	77	59	45	21
AMIENS	110	82	38	16
ROUEN	103	83	40	14
LIMOGES	56	44	14	8
NICE	144	104	46	16
CORSE	27	18	3	1
REUNION	105	62	27	12
MARTINIQUE	71	36	11	4
GUADELOUPE	92	53	10	0
GUYANNE	13	2	0	0
PARIS/CRET/VERS	861	557	298	129
POLYNESIE	33	24	8	5

CAFEP CAPES-PRIVÉ MATHÉMATIQUES

Académies				
	I	P	a	A
AIX MARSEILLE	43	20	6	4
BESANCON	11	7	3	0
BORDEAUX	41	26	10	3
CAEN	29	22	5	1
CLERMONTFERRAND	12	9	4	2
DIJON	19	12	2	1
GRENOBLE	40	29	10	5
LILLE	91	69	17	8
LYON	44	33	13	9
MONTPELLIER	62	32	9	5
NANCY METZ	29	18	9	3
POITIERS	14	9	3	1
RENNES	89	71	15	6
STRASBOURG	18	14	2	2
TOULOUSE	35	23	8	4
NANTES	92	74	33	12
ORLEANS TOURS	28	16	3	1
REIMS	12	5	3	2
AMIENS	20	10	3	1
ROUEN	23	13	6	3
LIMOGES	4	0	0	0
NICE	17	8	3	1
CORSE	1	0	0	0
REUNION	9	3	2	0
MARTINIQUE	6	2	0	0
GUADELOUPE	7	2	0	0
PARIS/CRET/VERS	166	103	31	16
POLYNESIE	2	1	0	0

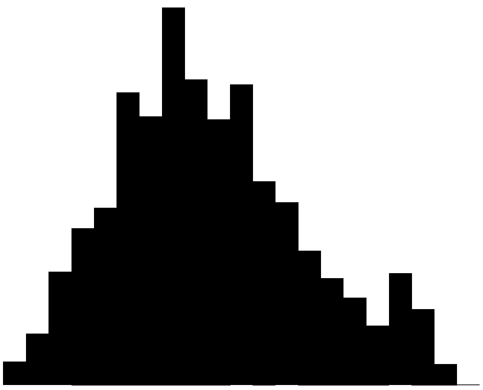
1.3.4 Répartition des notes

CAPES EXTERNE MATHÉMATIQUES

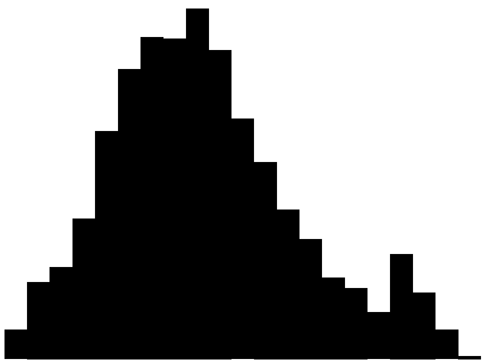
Écrit : quartiles sur les notes non nulles									
	Présents			admissibles			Admis		
Épreuve 1 (sur 20)	11	8	6	14	11	9	15	13	10
Épreuve 2 (sur 20)	11	8	5	13	11	9	15	12	10
Total écrit (sur 40)	22	16	12	27	21	18	29	24	21

Écrit, épreuve 1 : moyenne des admis 12,73 sur 20.
Écrit, épreuve 2 : moyenne des admis 12,33 sur 20.

Écrit : histogramme cumulé (sur 20)									
	Total			écrit 1			écrit 2		
	P	a	A	P	a	A	P	a	A
20	0	0	0	1	1	0	3	3	2
19	10	10	3	23	23	8	34	34	11
18	66	66	23	104	104	51	104	104	39
17	158	158	71	222	221	120	215	215	109
16	216	216	112	285	284	167	265	265	148
15	299	299	175	378	377	235	340	340	204
14	416	416	261	492	491	314	426	426	267
13	539	539	358	634	632	412	553	553	348
12	681	681	456	828	826	513	711	711	440
11	893	893	562	1044	1037	590	920	920	546
10	1156	1156	659	1362	1338	693	1174	1162	635
9	1513	1513	759	1644	1533	742	1501	1433	722
8	1880	1802	806	1968	1699	780	1872	1649	773
7	2244	1802	806	2368	1784	804	2211	1751	794
6	2600	1802	806	2653	1801	806	2552	1789	803
5	2901	1802	806	2963	1802	806	2859	1800	805
4	3123	1802	806	3151	1802	806	3101	1801	805
3	3282	1802	806	3317	1802	806	3250	1802	806
2	3369	1802	806	3437	1802	806	3348	1802	806
1	3431	1802	806	3491	1802	806	3430	1802	806
0	3453	1802	806	3516	1802	806	3461	1802	806



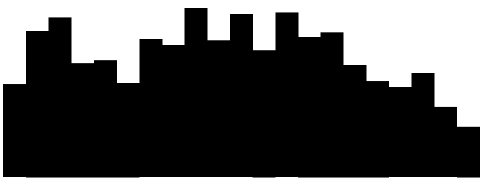
Écrit 1



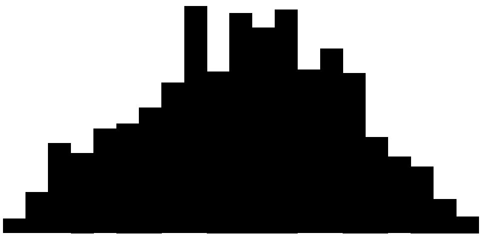
Écrit 2

Oral : quartiles sur les notes non nulles						
	admissibles			Admis		
Épreuve 1 (sur 20)	14	9	5	16	13	10
Épreuve 2 (sur 20)	13	10	7	15	13	10
Total général (sur 80)	49	41	34	55	49	45

Oral et total général (sur 20)						
	Total		oral 1		oral 2	
	a	A	a	A	a	A
20	0	0	31	31	10	10
19	0	0	74	72	31	30
18	3	3	138	135	72	67
17	13	13	193	190	119	111
16	47	47	252	248	178	160
15	96	96	321	310	276	244
14	171	171	410	386	389	332
13	313	313	496	448	489	407
12	466	466	597	516	626	499
11	647	647	675	564	752	570
10	897	806	775	615	887	637
9	1090	806	859	653	986	688
8	1305	806	963	687	1125	733
7	1455	806	1044	717	1217	755
6	1527	806	1129	743	1294	771
5	1562	806	1187	759	1361	790
4	1563	806	1259	773	1425	799
3	1563	806	1329	785	1474	802
2	1563	806	1427	796	1529	805
1	1563	806	1517	804	1554	806
0	1563	806	1574	806	1563	806



Oral 1



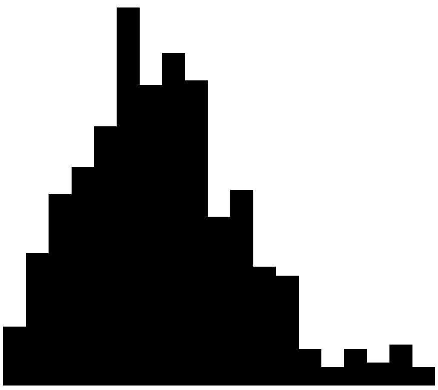
Oral 2

CAFEP CAPES-PRIVÉ MATHÉMATIQUES

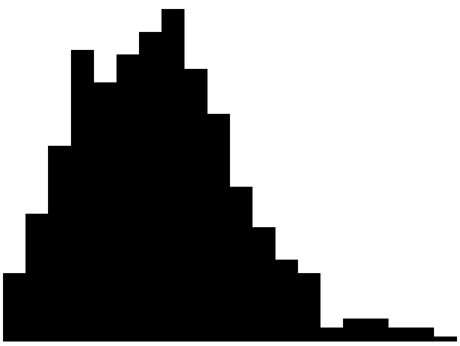
Écrit : quartiles sur les notes non nulles									
	Présents			admissibles			Admis		
Épreuve 1 (sur 20)	9	6	4	12	10	9	14	12	10
Épreuve 2 (sur 20)	9	6	4	12	10	9	13	11	10
Total écrit (sur 40)	17	13	8	23	20	18	26	22	20

Écrit, épreuve 1 : moyenne des admis 11,95 sur 20.
Écrit, épreuve 2 : moyenne des admis 11,52 sur 20.

Écrit : histogramme cumulé (sur 20)									
	Total			écrit 1			écrit 2		
	P	a	A	P	a	A	P	a	A
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	1	1	1
18	2	2	2	4	4	3	4	4	4
17	5	5	4	13	13	10	7	7	6
16	10	10	8	18	18	13	12	12	11
15	15	15	13	26	26	21	17	17	13
14	23	23	20	30	30	24	20	20	16
13	32	32	25	38	38	32	35	35	28
12	48	48	40	62	62	47	53	53	41
11	71	71	54	88	88	63	78	78	54
10	108	108	71	131	130	71	112	109	67
9	151	151	81	168	156	78	162	151	79
8	210	200	90	235	184	86	222	182	84
7	278	200	90	308	198	90	295	194	87
6	367	200	90	374	199	90	363	199	89
5	430	200	90	457	199	90	426	200	90
4	490	200	90	514	200	90	483	200	90
3	551	200	90	562	200	90	547	200	90
2	594	200	90	604	200	90	590	200	90
1	618	200	90	633	200	90	618	200	90
0	631	200	90	646	200	90	633	200	90



Écrit 1

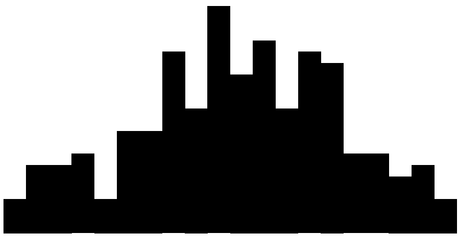


Écrit 2

Oral : quartiles sur les notes non nulles						
	admissibles			Admis		
Épreuve 1 (sur 20)	13	9	4	16	13	10
Épreuve 2 (sur 20)	14	11	8	16	14	11
Total général (sur 80)	47	40	33	55	48	44

Oral et total général (sur 20)						
	Total		oral 1		oral 2	
	a	A	a	A	a	A
20	0	0	4	4	3	3
19	0	0	9	9	9	9
18	0	0	14	13	14	14
17	0	0	22	21	21	19
16	4	4	30	29	28	24
15	9	9	38	37	43	34
14	21	21	45	42	59	46
13	28	28	56	50	70	53
12	46	46	63	54	87	63
11	71	71	76	65	101	70
10	101	90	86	69	121	75
9	128	90	96	74	132	79
8	153	90	102	75	148	83
7	172	90	113	80	157	84
6	184	90	132	85	166	87
5	190	90	139	87	169	88
4	191	90	148	89	176	89
3	191	90	158	89	182	90
2	191	90	163	89	188	90
1	191	90	183	90	191	90
0	191	90	191	90	191	90

Oral 1



Oral 2

1.4 Les épreuves écrites

Les épreuves écrites avaient lieu le lundi 10 et le mardi 11 mars 2008.

La proportion des candidats ayant abandonné à l'issue de la première épreuve est à peine de 1,3 %. On trouve toujours quelques bonnes copies de première épreuve, suivies d'une absence en seconde épreuve. Nous trouvons aussi, comme d'habitude, quelques candidats fantaisistes qui viennent à la seconde épreuve sans être venus à la première.

Il est rappelé que l'absence à une épreuve entraîne l'élimination du candidat. Le retard est aussi une cause d'élimination, les candidats arrivant après la distribution des sujets n'étant pas autorisés à composer.

La définition des épreuves proprement dites, les buts généraux qu'elles poursuivent, ainsi que le programme auquel elles sont limitées, sont détaillées dans les documents officiels (voir la partie qui leur est consacrée dans le rapport).

Les correcteurs élaborent leurs grilles de correction lors d'une réunion plénière, tenue après qu'ils aient eu le temps d'analyser les sujets et de lire un échantillon de copies. Chaque copie est ensuite corrigée deux fois, de manière totalement indépendante. Les deux correcteurs jumelés se concertent à la fin de leur travail pour décider de la note finale.

Aucun commentaire, aucune annotation particulière ne figure sur les copies. Seule la note finale après harmonisation y est inscrite. Les candidats qui souhaitent après coup revoir leur travail pour mieux comprendre le résultat obtenu peuvent, conformément aux dispositions de la loi n° 78.753 du 17 juillet 1978, obtenir satisfaction en s'adressant à la DPE qui conserve les copies pendant un an à cet effet.

De manière générale, les sujets des épreuves écrites sont construits dans le but de discriminer l'ensemble des candidats, des meilleurs aux plus faibles ; c'est pourquoi de très bonnes notes ont pu être attribuées à des copies n'abordant pas, et même de loin, l'ensemble du sujet. Ce fait que l'on peut trouver contestable s'explique aussi par le souci qu'ont les auteurs de sujets de construire des problèmes offrant un contenu suffisamment construit, notamment aboutissant à un ou des résultats significatifs, et aussi par la nécessité de ne pas trop centrer le texte sur une partie trop réduite du programme. Les questions qui recevront un poids particulièrement significatif dans le classement des candidats ne sont pas distinguables dans l'énoncé (d'autant qu'elles ne s'imposent parfois qu'au moment de la correction des copies), ce qui empêche d'estimer raisonnablement la note à la lecture d'une copie isolée.

1.5 Les épreuves orales

1.5.1 Organisation

Elles ont eu lieu du 27 juin au 18 juillet 2008 au lycée Marie Curie (Sceaux). Les interrogations avaient lieu tous les jours, dimanches et 14 juillet inclus.
Le jury était séparé en 24 commissions de trois personnes. La composition de ces commissions est déterminée en tenant compte de l'obligation de croiser les compétences, ce qui conduit à faire travailler ensemble des personnes intervenant aux divers niveaux possibles, enseignement secondaire, enseignement post-baccalauréat, enseignement supérieur, université et IUFM, inspection pédagogique régionale. La présence de personnels enseignant en IUFM fait pour chaque cas l'objet d'une réflexion appropriée, le but poursuivi étant d'arbitrer au mieux entre deux nécessités contradictoires : d'un côté, éviter autant que possible

des situations où il y aurait confusion des rôles de formateur et d'évaluateur, et d'un autre côté, éviter de trop distendre les liens avec les centres de formation.
Les candidats sont convoqués en début d'après-midi pour l'épreuve d'exposé et le lendemain matin pour l'épreuve sur dossier. Ils passent devant deux commissions jumelées qui échangent leurs candidats pour la seconde épreuve. Chaque commission fait passer les deux types d'épreuves. Un membre de la présidence accueille les candidats avant chaque épreuve afin d'en préciser les modalités et rappeler quelques instructions à son sujet.

Les candidats pouvaient fournir une adresse électronique lors de leur inscription. Immédiatement après signature de la liste des admissibles, les résultats ont été transmis aux adresses connues (plus de 98 % des candidats admissibles ont été dans ce cas cette année).

Les références des textes officiels décrivant la forme des épreuves orales sont rappelées dans la partie 1.2 de ce rapport.

1.5.2 Conseils pratiques.

Les demandes de déplacements ou reports de la date de la convocation ne sont pas examinées par la présidence du jury, sauf dans les deux cas qui suivent :

— coïncidence entre deux convocations à des concours de recrutement de l'Éducation Nationale auxquels le candidat est simultanément admissible (CAPES et agrégation, ou CAPLP, ou CRPE par exemple) ;

— cas de force majeure, maladie, ou événement familial d'importance majeure.

Lorsque ces demandes sont prises en considération, il n'est pas toujours possible d'y répondre favorablement. Réaliser les arrangements correspondants n'est pas une obligation du jury. La convocation aux épreuves orales se fait par courrier électronique et par courrier postal à l'adresse indiquée par le candidat. Une confirmation par voie électronique est demandée au candidat. Cette expérience mise en œuvre à la session 2008 a montré que plus de 95 % des candidats l'utilisent et prennent le soin de contacter le président du jury par voie électronique à une adresse générique mise à leur disposition. Les candidats négligeant cette procédure compliquent et accroissent la tâche de la présidence. En effet, l'organisation quotidienne des convocations ne permet de tenir compte de demandes légitimes de report de convocation que si la présidence du jury est en mesure de trouver les « places » vacantes laissées par les candidats qui, pour diverses raisons, renoncent à passer les épreuves orales.

Il est rappelé aux candidats que l'adresse qu'ils fournissent lors de leur inscription doit être une adresse permanente, valable pour toute la durée des épreuves et pour la phase d'affectation. Ils doivent éventuellement prendre toute disposition pour que le courrier puisse les atteindre pendant toute la période concernée (cf. B.O. spécial n° 13 du 31 août 1995, p. 13).

Une tenue vestimentaire correcte est souhaitable : ce qui est convenable en villégiature ne l'est pas nécessairement devant le jury d'un concours de recrutement. L'utilisation des téléphones portables est interdite dans les locaux du concours, tant pour éviter d'éventuelles fraudes que pour ne pas déranger les candidats par des sonneries intempestives.

Les oraux sont publics. Le nombre important des visiteurs conduit la présidence du jury à réglementer leurs déplacements dans les locaux du concours. Ils ne peuvent y pénétrer que pour accompagner une vague de candidats dans les salles de commission et ne doivent en aucun cas parler aux candidats ou stationner dans les couloirs. Afin de ne pas trop perturber ni les candidats ni le bon fonctionnement du concours, le nombre des visiteurs est limité à au plus trois dans la même salle de commission.

Le CAPES et le CAFEP sont des concours et non des examens ; comme à l'écrit, la note d'oral sert à classer les candidats les uns par rapport aux autres. Cette note a une valeur relative et ne peut refléter ce qui serait la valeur objective d'une épreuve. Il est difficile voire impossible dans les faits pour le candidat de s'évaluer lui-même, et donc de prévoir la note qu'il recevra.

Les notes des épreuves orales font l'objet de deux saisies informatique indépendantes, suivies d'une confrontation des deux saisies et de l'édition de listes, soumises aux commissions pour vérification. Ces dispositifs rendent l'hypothèse d'une erreur de transmission improbable autant qu'il est humainement possible.

1.5.3 L'évaluation des épreuves orales

À un concours de recrutement de l'enseignement secondaire, l'on se trouve au croisement d'exigences de nature assez diverses.

On pourrait se demander pourquoi l'évaluation des compétences purement disciplinaires est présente dans un tel concours, puisque celui-ci s'adresse aux titulaires d'une licence, et que les candidats ont ainsi déjà fait leurs preuves en ce domaine. Cette position mérite d'être discutée, et réfutée, avec soin.

Les licences délivrées par des systèmes de formations assez largement autonomes sont loin d'être uniformes, ce qui justifie déjà le maintien de la présence d'une évaluation disciplinaire au sein du CAPES. De plus, les licences ne peuvent pas toujours suffire en elles-mêmes si leur contenu n'a pas été prévu de manière spécifique pour convenir à un futur enseignant du secondaire. Enfin, il est prévu que certaines personnes, quoique non titulaires d'une licence, ont le droit se présenter au concours. Tous ces facteurs plaident pour le maintien d'une évaluation disciplinaire forte dans les épreuves du CAPES.

Par leur position professionnelle, une majorité des interrogateurs aux épreuves orales sont naturellement attentifs en premier lieu au contenu proprement disciplinaire des prestations. En composant les commissions de manière à varier au mieux les points de vue, il est possible de faire en sorte que la capacité proprement professionnelle soit correctement prise en compte. Même si la vérification finale de l'aptitude à « tenir » devant les élèves repose sur l'évaluation du stage, il est demandé au candidat, lors des deux épreuves orales, de montrer qu'il dispose des qualités nécessaires en matière de communication et de présence devant les auditeurs que sont les membres du jury.

Il n'y a pas de grille chiffrée d'évaluation pour les épreuves orales ; l'on peut simplement définir trois types de compétences pour lesquelles une insuffisance flagrante amène la commission à abaisser la note de manière significative ou déterminante :

— Les compétences en communication : élocution, clarté, attitude envers la commission et capacité de prendre en compte les questions, présentation du tableau, maîtrise du temps, de l'écrit au tableau, de la calculatrice et du rétroprojecteur, etc.

— Les compétences disciplinaires et techniques : l'absence de propositions ou d'affirmations mathématiquement inexactes, la présence relativement au thème traité de connaissances et de résultats cohérents, l'absence de lacune fondamentale relativement à ce thème, le respect des consignes associées au thème et notamment celles concernant l'usage des calculatrices.

— Les compétences de nature pré-professionnelle : connaissance des programmes, capacité à construire des exposés et des choix d'exercices adaptés et progressifs, maîtrise à un niveau suffisant des propositions, démonstrations, solutions que le candidat propose de lui-même.

1.5.4 Première épreuve : exposé sur un thème donné.

Le texte qui suit s'appuie sur la note parue dans le B.O. spécial n° 5 du 21 octobre 1993, qui définit les épreuves du CAPES externe de mathématiques.

La première épreuve orale dure 45 minutes réparties en :

• 25 minutes pour l'exposé, le candidat gère son temps et sa présentation comme il l'entend, le jury n'intervenant pas sur le contenu, et n'interrompant en aucune manière le candidat, sauf éventuellement en cas de problème pratique.

• 20 minutes d'entretien avec la commission.

Les candidats tirent au sort deux thèmes d'exposé et en choisissent un. Ils disposent de deux heures pour préparer l'épreuve. Ils ne disposent d'aucun document autre que les programmes et les instructions relatives au concours. Les candidats ne sont pas autorisés à utiliser leur calculatrice personnelle. Ils utilisent l'un des modèles disponibles. (voir annexe 5.2). Ils peuvent utiliser des transparents ; le jury ne les fournissant pas, il leur est demandé d'apporter des transparents vierges, qui seront dûment identifiés comme tels avant emploi ; les transparents utilisés sont retenus par le jury. Leur nombre n'est pas limité.

Le programme de cette épreuve (cf. B.O. spécial n° 8 du 24 mai 2001 et partie I.2 de ce rapport) est extrait du programme de l'écrit du concours. Les candidats peuvent faire appel à l'intégralité du programme complémentaire (titre B) au cours de cette épreuve, que ce soit pendant leur exposé ou pendant l'entretien avec le jury. Cependant, aucun thème proposé ne peut porter sur les paragraphes extraits du programme complémentaire complétant le programme de cette épreuve (voir partie I.2), ni a fortiori sur d'autres points du programme complémentaire. Pendant l'entretien, le jury a toute latitude pour interroger le candidat sur les programmes de l'enseignement secondaire (titre A, partie I.2). Toute notion abordée par le candidat peut aussi faire l'objet de questions : il est attendu d'un futur enseignant qu'il ne présente à ses élèves que des notions dont il peut parler de manière un tant soit peu construite ; par conséquent, une allusion ou une ouverture sur un point hors du programme de cette épreuve n'est susceptible de valoriser le travail du candidat que si elle repose sur des connaissances suffisamment cohérentes, et si elle s'inscrit de manière logique comme un prolongement acceptable devant une classe du sujet traité. Les thèmes d'exposé proposés forment un ensemble couvrant le programme dans son intégralité et les couplages sont conçus de manière à proposer un vrai choix au candidat, deux thèmes jugés trop proches étant normalement écartés.

L'organisation actuelle du concours ne permet pas l'évaluation des compétences des candidats en matière de TICE au sens ou il n'y a pas d'épreuve devant ordinateur. Cette dimension de l'enseignement est abordée à travers l'usage de calculatrices rétroprojetables, dont la puissance permet d'aborder l'usage élémentaire de tableurs, ainsi que de logiciels — il est vrai rudimentaires — de géométrie. Pour une partie, de plus en plus importante, des sujets, l'illustration de telle ou telle propriété sur une calculatrice est expressément conseillée dans l'intitulé du sujet. Il est vivement conseillé aux candidats de prendre en compte ce conseil.

1.5.5 Seconde épreuve : épreuve sur dossier

L'épreuve sur dossier dure au maximum 45 minutes. Le temps est réparti de la façon suivante :

• Pendant 25 minutes au maximum le candidat expose les réponses aux questions contenues dans le dossier, et notamment son choix d'exercice (objectifs, illustration du thème...).

• Pendant 20 minutes au minimum un entretien s'instaure entre la commission et le candidat, au cours duquel le candidat sera amené à résoudre, entièrement ou en partie, au moins un exercice choisi par la commission parmi l'exercice proposé par le jury et les exercices proposés par le candidat.

Les remarques concernant les TICE sont identiques à celles données pour la première épreuve orale (voir partie 5.4 ci-dessus). Les candidats ne sont pas autorisés à utiliser leur calculatrice personnelle. Ils empruntent l'un des modèles disponibles (voir annexe 5.2). Il y a cependant une différence importante entre les deux épreuves. En effet, les tâches que le candidat doit accomplir pendant sa préparation, ainsi que pendant l'épreuve proprement dite, incluent pour une partie appréciable des dossiers des tâches devant explicitement être réalisées sur calculatrice. Il est bien évident que le non-respect de cette consigne se traduit de manière forte dans la notation de l'épreuve.

Les candidats peuvent utiliser des transparents ; le jury ne les fournissant pas, il leur est demandé d'apporter des transparents vierges, qui seront dûment identifiés comme tels avant emploi ; les transparents utilisés sont retenus par le jury. Leur nombre n'est pas limité.

L'épreuve sur dossier se place au niveau de l'enseignement secondaire (cf. B.O. n^{o} 21 du 26 mai 1994). Il n'y a aucune extension de programme dans ce cas.

Chaque dossier fait référence à un thème, dont l'intitulé plus ou moins long (le contenu correspondant étant plus ou moins large) figure dans l'en-tête du dossier. Il est essentiel pour le candidat d'interpréter de manière très précise cet intitulé ; notamment, le ou les exercices qu'il adjoint à celui proposé par le jury doivent constituer des illustrations de ce thème tel qu'il est défini, dans toute son ampleur. Ce point est développé dans la partie III.3.2 (analyse de la seconde épreuve orale).

Les candidats ont deux heures pour préparer l'épreuve et peuvent utiliser les ouvrages imprimés disponibles dans le commerce, vierges de toute annotation manuscrite. Ils peuvent les apporter ou en emprunter à la bibliothèque du concours. Le jury peut s'opposer à l'utilisation de certains ouvrages s'il juge que cela risque de dénaturer l'épreuve (cf. B.O. spécial n^{o} 5 du 21 octobre 1993).

La bibliothèque possède un certain nombre de manuels usuels, et pour quelques éditions un assez grand nombre, mais la fourniture d'un ouvrage déterminé ne peut en aucun cas être garantie. C'est pourquoi nous rappelons ici aux candidats qu'ils ont le droit d'utiliser leurs propres manuels. Afin que tous les candidats puissent disposer d'un réel choix, chacun ne peut emprunter plus de cinq ouvrages simultanément.

1.5.6 Commentaires sur l'utilisation de la calculatrice

Un certain nombre de sujets de première épreuve comportent une mention invitant les candidats à illustrer leur exposé par un ou plusieurs exemples nécessitant l'usage d'une calculatrice. Les candidats ont la possibilité de projeter l'écran de la calculatrice qu'ils utilisent, comme ils le feraient devant une classe. Par ailleurs, une partie significative des dossiers de seconde épreuve inclut de manière explicite et obligatoire l'usage de la calculatrice.

L'appréciation par le jury de l'usage des calculatrices — avec ou sans rétroprojection — met en évidence que, si souvent cet usage n'apporte pas de valeur ajoutée à la prestation du candidat (il s'agit par exemple de l'usage de la calculatrice à de simples fins opératoires), les utilisations à but pédagogique pertinent, et les démonstrations brillantes, deviennent nettement plus nombreuses d'année en année.

Les candidats et futurs candidats au CAPES externe de mathématiques doivent prendre en compte le fait que, pour le moment, l'aptitude à utiliser les TICE n'y est évaluée qu'à travers l'usage des calculatrices scientifiques. Les modèles admis au concours contiennent tous les fonctions attendues dans les programmes : tableur et logiciel de géométrie ; ils contiennent aussi des fonctions de calcul formel.

Les conditions de rétroprojection dépendent des salles, mais chaque commission a fait de son mieux pour installer les appareils de manière à pouvoir évaluer convenablement les prestations des candidats sur ce point, en faisant naturellement abstraction de la qualité technique de la projection.

2 ÉNONCES ET ANALYSE DES ÉPREUVES ÉCRITES

2.1 Énoncé de la première épreuve

Fonctions à variations bornées

Introduction

Dans ce problème, on s'intéresse aux *fonctions à variations bornées*. Cette notion a été introduite en 1881 par Jordan [1] pour étendre un théorème de Dirichlet [2] sur la convergence des séries de Fourier [3]. Il est composé de sept parties A, B, C, D, E, F et G.

Dans la partie A on établit quelques propriétés élémentaires relatives aux fonctions à variations bornées. En introduction de la partie B, on définit une notion de longueur bornée et de longueur pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. Son objectif est d'établir des propriétés générales sur cette notion : une inégalité triangulaire, une relation de Chasles... Dans la partie C on établit l'équivalence entre « être de longueur bornée sur tout segment » et « être à variations bornées ». La partie D se consacre au cas des fonctions de classe C^1. On y démontre qu'elles sont toujours de longueur bornée et on donne une formule pour calculer leur longueur. La partie E s'intéresse au cas des fonctions périodiques. La partie F est consacrée à l'étude d'un exemple. Dans la partie G, on étend les définitions et les propriétés présentées précédemment aux cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Sauf mentions contraires explicitées dans le texte, les parties de ce sujet ne sont pas *a priori* indépendantes.

Notations et définition

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(A, \mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble des fonctions de A vers $\mathbb{R}^n$. Pour tout $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^n)$ et $B \subseteq A$, $f|_B$ désigne la restriction de f à B.

• Dans tout le problème, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

• **Pour $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, on dit que f est à variations bornées lorsqu'il existe $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ croissante et $h \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ décroissante telles que $f = g + h$.**

1. Camille Marie Ennenmond Jordan, mathématicien français, Lyon 1838 – Paris 1922.
2. Gustav Peter Dirichlet, mathématicien allemand, Düren 1805 – Göttingen 1859.
3. Joseph Jean-Baptiste Fourier, mathématicien français, Auxerre 1768 – Paris 1830.

A. Premières propriétés

A1 Établir que toute fonction monotone définie sur I est à variations bornées.

A2a Montrer que l'ensemble des fonctions à variations bornées définies sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

A2b Établir que ce sous-espace est engendré par l'ensemble des fonctions croissantes sur I.

Dans la fin de cette partie, on considère $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ une fonction à variations bornées, et a et b deux éléments de I tels que $a < b$.

A3 Soit $\alpha \in I$. Démontrer qu'il existe $k \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ croissante et $l \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ décroissante telles que $f = k + l$ et $k(\alpha) = 0$.

A4 On écrit $f = g + h$ avec g croissante sur I et h décroissante sur I. Prouver que :

$$g(b) - g(a) \geqslant f(b) - f(a) \geqslant h(b) - h(a).$$

A5 Montrer que f est bornée sur le segment $[a,b]$.

A6 Établir qu'en tout point intérieur à I, la fonction f admet une limite à droite et une limite à gauche.

B. Fonctions de longueur bornée

Soient a et b dans I avec $a < b$ et $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. On rappelle qu'une subdivision σ de $[a,b]$ est une suite finie, strictement croissante, qu'on peut noter $(\sigma_k)_{0\leqslant k\leqslant p}$ où $p \in \mathbb{N}^*$, et vérifiant $\sigma_0 = a$ et $\sigma_p = b$.

Pour $\sigma = (\sigma_k)_{0\leqslant k\leqslant p}$ une subdivision de $[a,b]$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\ell(\sigma,f) = \sum_{i=1}^{i=p} |f(\sigma_i) - f(\sigma_{i-1})|.$$

On dit que f est de longueur bornée sur le segment $[a,b]$ lorsqu'il existe $\Lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout σ subdivision de $[a,b]$ on ait $\ell(\sigma,f) < \Lambda$. Si f est de longueur bornée sur $[a,b]$, on définit alors $L_a^b(f)$, la longueur de a à b de f, par :

$$L_a^b(f) = \sup_{\sigma}\{\, \ell(\sigma,f) \mid \sigma \textbf{ est une subdivision de } [a,b]\,\}.$$

De plus, on pose également $L_b^a(f) = -L_a^b(f)$ et $L_a^a(f) = 0$.

Dans cette partie, on considère f et g dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ et a,b,c trois éléments de I tels que $a < c < b$.

B1 On suppose que f est de longueur bornée sur $[a, b]$. Montrer que :

$$L_a^b(f) \geqslant 0.$$

B2 On suppose que f est de longueur bornée sur $[a, b]$. Montrer que :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant L_a^b(f).$$

B3 On suppose que f et g sont de longueur bornée sur $[a, b]$. Établir que $f + g$ est de longueur bornée sur $[a, b]$ et que :

$$L_a^b(f + g) \leqslant L_a^b(f) + L_a^b(g).$$

B4 On suppose que f est de longueur bornée sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$. On considère une subdivision $\sigma = (\sigma_k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ de $[a, b]$ et on pose :

$$\begin{cases} q = \max\{\, j \in \{0, \cdots, p\} \mid \sigma_j < c \,\} \\ r = \min\{\, j \in \{1, \cdots, p\} \mid \sigma_j > c \,\} \end{cases}$$

B4a Justifier l'existence de q et de r.

On définit alors les suites finies σ' et σ'' par :

$$\begin{cases} \sigma'_j = \sigma_j \text{ si } j \in \{0, \ldots, q\} \\ \sigma'_{q+1} = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma''_0 = c \\ \sigma''_j = \sigma_{j+r-1} \text{ si } j \in \{1, \ldots, p - r + 1\} \end{cases}$$

B4b Montrer que σ' est une subdivision de $[a, c]$ et que σ'' est une subdivision de $[c, b]$.

B4c Montrer que $\ell(\sigma, f) \leqslant \ell(\sigma', f) + \ell(\sigma'', f)$.

B4d Prouver que f est de longueur bornée sur $[a, b]$ et que :

$$L_a^b(f) \leqslant L_a^c(f) + L_c^b(f).$$

B5 On suppose maintenant que f est de longueur bornée sur $[a, b]$ et on considère une subdivision quelconque σ' de $[a, c]$ et une subdivision quelconque σ'' de $[c, b]$.

B5a Démontrer qu'il existe une subdivision de $[a, b]$, notée σ, telle qu'on ait

$$\ell(\sigma, f) = \ell(\sigma', f) + \ell(\sigma'', f).$$

B5b Montrer que f est de longueur bornée sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$ et que :

$$L_a^b(f) \geqslant L_a^c(f) + L_c^b(f).$$

B6 On suppose maintenant que f est de longueur bornée sur tout segment de I. Soient α, β, γ dans I, établir l'égalité :

$$L_\alpha^\beta(f) + L_\beta^\gamma(f) = L_\alpha^\gamma(f).$$

C. Lien entre « être de longueur bornée » et « être à variations bornées »

On considère $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

C1 Soient a et b dans I avec $a < b$.

C1a Soit $q \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ une fonction monotone. Prouver que q est de longueur bornée sur $[a, b]$ et qu'on a :

$$L_a^b(q) = |q(b) - q(a)|.$$

C1b On suppose que f est une fonction à variations bornées. Montrer que f est de longueur bornée sur $[a, b]$.

C2 On suppose que f est de longueur bornée sur tout segment de I. On choisit λ dans I et on définit alors les fonctions g et h, pour tout $t \in I$, par :

$$g(t) = \frac{1}{2}\left(f(t) + L_\lambda^t(f)\right) \quad \text{et} \quad h(t) = \frac{1}{2}\left(f(t) - L_\lambda^t(f)\right)$$

Prouver que g est croissante sur I et que h est décroissante sur I.

C3 En déduire que f est à variations bornées si et seulement si f est de longueur bornée sur tout segment de I.

D. Cas des fonctions de classe C^1

On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ de classe C^1 sur I. *Le but de cette partie est de montrer que f est de longueur bornée sur tout segment de I et que pour tous α et β dans I on a*

$$L_\alpha^\beta(f) = \int_\alpha^\beta |f'(t)| \mathrm{d}t.$$

D1 Soient u et v dans I avec $u < v$, établir que $|f(u) - f(v)| \leqslant \displaystyle\int_u^v |f'(t)| \,\mathrm{d}t$.

D2 Soient a et b dans I avec $a < b$.

D2a Soit σ une subdivision de $[a, b]$. Établir que $\ell(\sigma, f) \leqslant \displaystyle\int_a^b |f'(t)| \,\mathrm{d}t$.

D2b Démontrer que f est de longueur bornée sur $[a, b]$ et que

$$L_a^b(f) \leqslant \int_a^b |f'(t)| \mathrm{d}t.$$

D3 Soient a et b dans I avec $a < b$, et soit un réel $\varepsilon > 0$.

D3a Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma = (\sigma_k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ une subdivision de $[a, b]$, tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ et pour tout x et y éléments de $[\sigma_{i-1}, \sigma_i]$ on ait

$$|f'(x) - f'(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

D3b Prouver que pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ il existe $c_i \in [\sigma_{i-1}, \sigma_i]$ tel que

$$|f'(c_i)|(\sigma_i - \sigma_{i-1}) = |f(\sigma_i) - f(\sigma_{i-1})|.$$

D3c En déduire que pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, on a

$$|f(\sigma_i) - f(\sigma_{i-1})| \geqslant \int_{\sigma_{i-1}}^{\sigma_i} |f'(t)|\mathrm{d}t - \frac{\varepsilon(\sigma_i - \sigma_{i-1})}{b-a}.$$

D3d Établir que

$$\ell(\sigma, f) \geqslant \int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t - \varepsilon.$$

D4 Conclure.

D5 Établir que f est à variations bornées.

E. Cas des fonctions périodiques

Dans cette partie on s'intéresse aux fonctions périodiques à variations bornées. On y utilise certains résultats de la partie A. Par ailleurs, les résultats de cette partie ne sont pas utilisés dans les autres parties.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $[x]$ la partie entière de x. On rappelle que $[x]$ est l'unique élément de $\mathbb{Z}$ vérifiant

$$[x] \leqslant x < [x] + 1.$$

On rappelle également que la fonction partie entière est croissante. On considère $T \in \mathbb{R}_+^*$ et on définit la fonction p sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = \left[\dfrac{x}{T}\right]$.

E1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que $x - p(x)T \in [0, T[$.

E2 Pour a et b deux réels tels que $a \leqslant b$, établir que :

$$p(a) = p(b) \quad \text{ou} \quad p(a) + 1 \leqslant p(b).$$

E3 Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction périodique de période T. On suppose que $f|_{[0,T]}$ est à variations bornées. On peut donc écrire $f|_{[0,T]} = k + l$ avec $k \in \mathcal{F}([0,T], \mathbb{R})$ croissante, $l \in \mathcal{F}([0,T], \mathbb{R})$ décroissante et $k(0) = 0$ (d'après A3). Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\begin{aligned} g(x) &= p(x)k(T) + k\left(x - p(x)T\right) \\ h(x) &= f(x) - g(x). \end{aligned}$$

E3a Justifier que les fonctions g et h sont bien définies sur $\mathbb{R}$.

E3b Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$. Montrer que $g(a) \leqslant g(b)$.

E3c Montrer que pour tout réel x on a : $h(x) = -p(x)k(T) + l\big(x - p(x)T\big)$.

E3d Montrer que pour tout $u \in [0, T]$ on a $l(0) \geqslant l(u) \geqslant l(0) - k(T)$.

E3e Prouver finalement que f est à variations bornées.

E4 On considère la fonction

$$\psi : x \longmapsto \frac{1}{x - [x] - 1}$$

E4a Montrer que ψ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est périodique de période 1.

E4b Parmi les trois fonctions $\psi|_{[0,1[}$, $\psi|_{[0,1]}$ et ψ, quelles sont celles qui sont à variations bornées ? On justifiera chacune des réponses.

Dans la fin de cette partie, on considère la fonction φ définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par :

$$\varphi(x) = |\sin x| + \sin x.$$

E5 Donner, sans justification, la représentation graphique de $\varphi|_{[-2\pi,2\pi]}$ dans un repère qu'on choisira.

E6 Montrer que φ est à variations bornées.

E7 D'après A3 et E6, on peut écrire $\varphi = g + h$ avec $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ croissante vérifiant $g(0) = 0$ et $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ décroissante.

E7a Établir que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ g(2n\pi) + 2 \leqslant g\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.
(Indication : On pourra utiliser A4.)

E7b En déduire que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ g(n\pi) \geqslant n$.

E7c Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$?

E7d En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

F. Un exemple de fonction dérivable et bornée mais non à variations bornées

Les premières questions de cette partie peuvent se traiter indépendamment des parties précédentes.

On étudie dans cette partie certaines propriétés de la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

F1a Étudier la parité de f.

F1b Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout x réel.

F1c La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

F1d Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?

F1e En déduire que f est bornée.

F2 Montrer que la série de terme général $\ln\left(\dfrac{4n+1}{4n-1}\right)$ $(n \geqslant 1)$ est divergente.

F3 On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = \sqrt{\dfrac{2}{(2n-1)\pi}}$

F3a Vérifier que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et est de limite nulle.

F3b Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir que

$$\int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{t}\left|\cos\frac{1}{t^2}\right| \mathrm{d}t \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\sqrt{\frac{4}{(4n+1)\pi}}}^{\sqrt{\frac{4}{(4n-1)\pi}}} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

F3c Prouver alors que la série de terme général $\displaystyle\int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{t}\left|\cos\frac{1}{t^2}\right| \mathrm{d}t$ $(n \geqslant 1)$ est divergente.

F3d En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{u_1} \frac{1}{t}\left|\cos\frac{1}{t^2}\right| \mathrm{d}t$ est divergente.

F4a Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente mais qu'elle n'est pas absolument convergente.

F4b Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t$?

F5 Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $ab \leqslant 0$. Prouver que f n'est pas de longueur bornée sur $[a,b]$.

F6 Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Démontrer que l'application $f|_J$ est à variations bornées si et seulement si $0 \notin J$.

G. Généralisation au cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

Dans cette partie, on considère un entier $n \geqslant 2$ et on munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique ; la norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée est donc définie, pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, par

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2}.$$

On peut prolonger la définition introduite au début de la partie B, de fonction de longueur bornée aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ de la manière suivante :

Etant données a et b dans I avec $a < b$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$, pour $\sigma = (\sigma_k)_{0\leqslant k\leqslant p}$ une subdivision de $[a,b]$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\ell(\sigma, f) = \sum_{i=1}^{i=p} \|f(\sigma_i) - f(\sigma_{i-1})\|\,.$$

On dit que f est de longueur bornée sur le segment $[a,b]$ lorsqu'il existe $\Lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout σ subdivision de $[a,b]$ on ait $\ell(\sigma, f) < \Lambda$. Si f est

de longueur bornée sur $[a,b]$, on définit alors $L_a^b(f)$, la longueur de a à b de f, par :

$$L_a^b(f) = \sup_\sigma\{\,\ell(\sigma, f) \mid \sigma \textbf{ est une subdivision de } [a,b]\,\}.$$

De plus, on pose également $L_b^a(f) = -L_a^b(f)$ et $L_a^a(f) = 0$.

Dans cette partie, on considère deux éléments a et b de I tels que $a < b$, et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note f_i la i-ième composante de f. Ainsi, pour tout $t \in I$, on a $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$ (on remarquera que $f_i \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$).

G1 Soit R un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si f est de longueur bornée sur $[a,b]$ alors $R \circ f$ l'est aussi sur $[a,b]$ et que :

$$L_a^b(R \circ f) = L_a^b(f).$$

G2 On suppose que f est de longueur bornée sur $[a,b]$. Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la fonction f_i est de longueur bornée sur $[a,b]$ et que :

$$L_a^b(f_i) \leqslant L_a^b(f).$$

G3 On suppose que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, f_i est de longueur bornée sur $[a,b]$. Démontrer que f est de longueur bornée sur $[a,b]$ et que :

$$L_a^b(f) \leqslant \sum_{i=1}^{i=n} L_a^b(f_i).$$

G4 Démontrer que f est de longueur bornée sur tout segment de I si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, f_i est à variations bornées.

G5 On suppose maintenant que f est de longueur bornée sur tout segment de I. Soient α, β, γ dans I. Établir l'égalité :

$$L_\alpha^\beta(f) + L_\beta^\gamma(f) = L_\alpha^\gamma(f).$$

Dans toute la suite, on suppose que $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ est de classe C^1 sur I et on rappelle que :

$$\forall t \in I,\ f'(t) = \big(f_1'(t), \ldots, f_n'(t)\big).$$

G6 Prouver que f est de longueur bornée sur tout segment de I.

G7 Soit T un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $T \circ f$ est de classe C^1 sur I et que $(T \circ f)' = T \circ f'$.

G8 On définit la fonction w, pour $x \in I$, par $w(x) = L_a^x(f)$ et on considère $t \in I$.

G8a Montrer qu'il existe $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\vec{u}\| = 1$ et $f'(t) = \|f'(t)\|\,\vec{u}$.

G8b Prouver qu'il existe R un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$R(\vec{u}) = (1, 0, \ldots, 0).$$

On pose alors $g = R \circ f$ et $(g_1, \ldots, g_n) = g$.

G8c Montrer que g est de classe C^1 sur I et établir que :

$$g_1'(t) = \|f'(t)\| \quad \text{et} \quad \forall i \in \{2, \ldots, n\},\ g_i'(t) = 0.$$

G8d Montrer que g est de longueur bornée sur tout segment de I.
G8e Soit $v \in \mathbb{R}^*$ tel que $t + v \in I$, prouver que

$$\frac{1}{v} L_t^{t+v}(g_1) \leqslant \frac{1}{v} L_t^{t+v}(f) \leqslant \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{i=n} L_t^{t+v}(g_i).$$

G8f En déduire que w est dérivable en t et que $w'(t) = \|f'(t)\|$.
G9 Établir que :

$$L_a^b(f) = \int_a^b \|f'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

G10 Soit $h \in \mathcal{F}([a,b], \mathbb{R}^n)$ une fonction de classe C^1 sur $[a, b[$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b h'(t)\,\mathrm{d}t$ soit absolument convergente. On veut montrer que h est de longueur bornée sur $[a, b]$ et exprimer $L_a^b(h)$. On considère $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
G10a Prouver que $h|_{[a,b[}$ admet une limite finie en b. On notera H cette limite.
G10b Soit $x \in [a, b]$. Montrer que :

$$\|h(x) - h(b)\| \leqslant \|H - h(b)\| + \int_x^b \|h'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

G10c Soit σ une subdivision de $[a, b]$. Établir que :

$$\ell(\sigma, h) \leqslant \|H - h(b)\| + \int_a^b \|h'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

G10d Montrer qu'il existe $d \in \,]a, b[$ tel que :

$$\|H - h(b)\| - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \|h(d) - h(b)\| - \int_d^b \|h'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

G10e Montrer qu'il existe une subdivision σ' de $[a, d]$ telle que :

$$\int_a^d \|h'(t)\| \, \mathrm{d}t - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \ell(\sigma', h).$$

G10f Montrer qu'il existe une subdivision, σ'' de $[a, b]$ telle que :

$$\|H - h(b)\| + \int_a^b \|h'(t)\| \, \mathrm{d}t - \varepsilon \leqslant \ell(\sigma'', h).$$

G10g Conclure.
G11 Soit $h \in \mathcal{F}([a,b], \mathbb{R}^n)$ telle que h soit de classe C^1 sur $[a, b[$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b h'(t)\,\mathrm{d}t$ ne soit pas absolument convergente. Soit $A \in \mathbb{R}$.
G11a Démontrer qu'il existe $c \in [a, b[$ tel que $\displaystyle\int_a^c \|h'(t)\| \, \mathrm{d}t > A + 1$.
G11b Montrer qu'il existe une subdivision σ de $[a, b]$ telle que $\ell(\sigma, h) > A$.
G11c Prouver que h n'est pas de longueur bornée sur $[a, b]$.

FIN DE L'ÉPREUVE

2.2 Remarques sur la production des candidats

Dans ce problème, on étudiait certaines propriétés des fonctions de la variable réelle. Les notions et méthodes d'analyse sont étudiées lors des deux premières années du cycle universitaire. On rappelle ici que toute fonction n'est pas a priori dérivable et que la définition de « f est croissante » **n'est pas** « $f' \geqslant 0$ ».

Partie A

La partie A a généralement été correctement traitée si ce n'est la dernière question. On rappelle que si f est une application, $f(x)$ n'en est pas une en genéral mais désigne ici un réel.

A1 On gagnait du temps pour traiter cette question en remarquant que la fonction constante $x \mapsto 0$ était à la fois croissante et décroissante.

A2a Une minorité de candidats ne sait pas du tout ce qu'est un sous-espace vectoriel, une autre oubliait de vérifier une condition.

A2b Cette question pouvait se traiter par double inclusion, ce que n'ont pas toujours fait les candidats.

A3 Étonnamment, une partie non négligeable des candidats n'a pas su traiter cette question.

A4, A5 Globalement bien traitées.

A6 Cette question a rarement été bien traitée et certains candidats ont inventé des hypothèses ou des théorèmes pour arriver au résultat souhaité.

Partie B

Cette partie exigeait une rédaction rigoureuse. Nous rappelons que la borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$ n'existe pas à priori et que l'utilisation abusive « du passage au sup » était à proscrire. Certains candidats semblent croire qu'il existe σ telle que $\ell(\sigma, f) = L_a^b(f)$ ce qui est faux en général.

B1,B2 Généralement bien traitées.

B3 Il fallait commencer par prouver l'existence de $L_a^b(f+g)$ avant de le mettre dans une relation.

B4a Bon nombre de candidats semblent ignorer les conditions d'existence d'un maximum d'une partie de $\mathbb{N}$.

B4b Souvent bien traitée si ce n'est la vérification non toujours faite de $\sigma'_{q+1} > \sigma'_q$ et de $\sigma''_0 < \sigma''_1$.

B4c Une petite minorité de candidats a vu que pour éviter d'écrire des choses fausses, il était préférable de traiter cette question en distingant deux cas : « c est une image de σ » et « c n'est pas atteint par σ ».

B4d Remarque analogue à B3, pour $L_a^b(f)$.

B5a Cette question a souvent été traitée correctement.

B5b Remarque analogue à B3, pour $L_a^c(f)$ et $L_c^b(f)$.

B6 Peu de candidats ont vu qu'il y avait plusieurs cas à traiter.

Partie C

C1a Une minorité de candidats a donné une majoration fausse de $\ell(\sigma, q)$ qui dépendait du nombre de pas de σ et qui en plus ne permettait pas de conclure.

C1b En général bien traitée.

C2 La plupart des candidats n'ont pas su utiliser B2, certains essayant même de calculer g'.

C3 Bien traitée en général, lorsqu'elle l'est.

Partie D

On voit parfois « $\int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t = |\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t|$ » dans cette partie et dans la partie F également.

D1 Certains candidats oublient d'utiliser les hypothèses.

D2a Beaucoup ne voient pas le lien avec la question précédente.

D2b Certains ont perdu du temps à prouver que $\int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t \neq +\infty$ en commençant par justifier que f' était bornée alors qu'il suffisait de remarquer $|f'|$ était continue pour justifier que l'intégrale était un nombre réel.

D3a L'uniforme continuité de f' était très rarement invoquée et rarement bien utilisée.

D3b L'égalité des accroissements finis est bien utilisée par une minorité de candidats.

D3c Cette question est rarement traitée.

D3d Bien traitée en géneral.

D4 La caractérisation de la borne supérieure avec des $\varepsilon > 0$ est rarement bien utilisée pour le cas où $\alpha < \beta$. Les deux autres cas $\alpha > \beta$ et $\alpha = \beta$ n'ont été traités que très rarement.

D5 Cette question n'est que très rarement traitée.

Partie E

E1 Bien faite en général.

E2 Rares sont les candidats qui ont compris qu'il suffisait de remarquer que p était croissante et à valeurs entières.

E3a Bien faite en général.

E3b Peu de candidats ont remarqué qu'il y avait deux cas à traiter : « $p(a) = p(b)$ » et « $p(a) + 1 \leqslant p(b)$ ».

E3c Bien faite en général.

E3d On note les difficultés d'un grand nombre de candidats à prouver la deuxième inégalité.

E3e On note les mêmes problèmes qu'en E3b pour prouver que h est décroissante.

E4a Bien faite en général.

E4b La grande majorité des candidats a eu du mal à utiliser les résultats démontrés au cours de la partie A.

E5 Bien faite en général.

E6,7 La fin de la partie E n'a été que très rarement traitée et quand c'est le cas, les résultats sont souvent mal justifiés.

Partie F

Cette partie laisse percevoir un certain nombre de lacunes. Une minorité semble ne pas savoir ce que signifie « de classe C^1 » et ne pas connaître le lien logique entre « être dérivable » et « être continue » pour une fonction. Chez une grande majorité de candidats, on note d'importantes difficultés à manipuler séries et intégrales impropres.

F1a, F1b Bien faites en général.

F1c La quasi-totalité des candidats affirme que la fonction, $t \mapsto \frac{1}{t}\cos\frac{1}{t^2}$ n'a pas de limite en 0 mais ne le démontre pas.

F1d Bien faite par une majorité.

F1e Cette question est mal traitée en général ; certains affirment que « comme on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ alors f est bornée par 1 ».

F2 Pour utiliser le théorème pour la convergence des séries utilisant des équivalents il faut rappeler que l'une des deux est de signe constant à partir d'un certain rang.

F3a Pour utiliser $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ afin d'étudier la monotonie de la suite il faut s'assurer du signe de la suite. Il était préférable d'utiliser la composée de trois fonctions de référence pour ce qui était demandé.

La suite de cette partie n'est que rarement traitée et lorsque c'est le cas les réponses sont souvent fausses.

Partie G

Cette partie n'a été que très rarement abordée et il s'agissait souvent uniquement de la première question. Une toute petite minorité d'excellents candidats a dépassé cette première question.

2.3 Enoncé de la seconde épreuve

À propos d'un théorème de Tchebychev sur la répartition des nombres premiers

Introduction

Étant donné un entier naturel n, on considère $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers compris entre 0 et n. Ce sujet s'intéresse au comportement de la suite $(\pi(n))_n$. Il est composé de deux grandes parties A et B.

La partie A vise à établir l'encadrement suivant :

$$(\ln 2)\frac{n}{\ln n} \leqslant \pi(n) \leqslant \mathrm{e}\frac{n}{\ln n}$$

valable pour tout $n \geqslant 3$. Elle est composée de deux sous-parties, A.I et A.II, consacrées respectivement à la minoration et à la majoration annoncées.

Ce genre d'encadrement suggère l'existence d'un lien asymptotique fort entre les suites $(\pi(n))_n$ et $\left(\dfrac{n}{\ln n}\right)_n$. La partie B s'intéresse à cette question puisque son objectif principal est de montrer le résultat suivant :

Théorème.— (Tchebychev[4]) *S'il existe un réel $c > 0$ telle que $\pi(n) \underset{n}{\sim} c\dfrac{n}{\ln n}$ alors nécessairement $c = 1$.*

Elle est composée de quatre sous-parties B.I, B.II, B.III et B.IV. C'est dans la partie B.III qu'on établit le théorème annoncé. La preuve qu'on en propose repose sur l'étude du comportement asymptotique de la suite $\left(\displaystyle\sum_{p \text{ premier } \leqslant n} \frac{1}{p}\right)_n$. Cette étude est réalisée au début de la partie B.III. Les parties B.I et B.II sont consacrées à l'établissement de formules importantes pour la suite. Dans la partie B.I on établit une formule due à Legendre[5] qui donne l'expression de la *valuation p-adique* de $n!$. Dans la partie B.II on démontre un théorème de Mertens[6] qui précise le comportement asymptotique de la suite $\left(\displaystyle\sum_{p \text{ premier } \leqslant n} \frac{\ln p}{p}\right)_n$. La partie B.IV est une application de la formule asymptotique trouvée dans la partie B.III. On y étudie la *densité* de l'ensemble des entiers possédant de *grands facteurs premiers*.

À la fin du sujet, une note documentaire met en perspective, d'un point de vue historique, le théorème de Tchebychev démontré ici. Sa lecture n'est pas essentielle au bon traitement du sujet.

Les parties de ce problème ne sont pas indépendantes entre elles.

4. Pafnouti Lvovitch Tchebychev, mathématicien russe, Okatovo 1821 – Saint-Pétersbourg 1894.
5. Adrien-Marie Legendre, mathématicien français, Paris 1752 – Auteuil 1833.
6. Franz Mertens, mathématicien autrichien, 1840 – 1927.

Notations et rappels

• On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers positifs.

• Si E désigne un ensemble fini, on note $\#E$ le *cardinal* de cet ensemble, c'est-à-dire le nombre d'éléments de E.

• Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ désignent deux suites numériques, on notera $u_n \underset{n}{\sim} v_n$ pour dire que ces suites sont *équivalentes*. On notera $u_n = o(v_n)$ pour dire que la suite $(u_n)_n$ est *négligeable* devant la suite $(v_n)_n$ et enfin, on notera $u_n = O(v_n)$ pour dire que la suite $(u_n)_n$ est *dominée* par la suite $(v_n)_n$, c'est-à-dire, qu'il existe un réel c et un entier n_0 tels que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $|u_n| \leqslant c|v_n|$.

• Si x désigne un réel, on notera $[x]$ sa *partie entière*, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x ; autrement dit, $[x]$ est l'unique élément de $\mathbb{Z}$ vérifiant :

$$[x] \leqslant x < [x] + 1.$$

• On rappelle que si a et b sont deux entiers tels que $0 \leqslant b \leqslant a$, le coefficient binomial $\binom{a}{b}$ est égal à $\frac{a!}{(a-b)!\,b!}$.

• Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers compris dans l'intervalle $[0, n]$; ainsi on a $\pi(0) = \pi(1) = 0$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 2$, $\pi(4) = 2$, etc. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $\delta(n) = \pi(n) - \pi(n-1)$, de sorte que si l'on pose $\delta(0) = 0$, on voit que δ est la fonction caractéristique de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire, $\delta(n)$ vaut 1 si n est premier, et 0 sinon).

• **Dans tout ce texte la lettre p désignera toujours et exclusivement un nombre premier**, ceci y compris lorsque la lettre p sera utilisée comme symbole d'indice d'une somme ou d'un produit. Par exemple, la notation $\displaystyle\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p}$ désigne la somme des inverses des nombres premiers p inférieurs ou égaux au réel x.

• Étant donnés un entier $n \geqslant 1$ et un nombre premier p, on appelle *valuation p-adique* de n l'entier noté $v_p(n)$ et égal à l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de n. Par exemple, si l'on prend $n = 350 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$ on a $v_2(350) = 1$, $v_3(350) = 0$, $v_5(350) = 2$, $v_7(350) = 1$ et $v_p(350) = 0$ pour tout nombre premier $p \geqslant 11$.

On admet les propriétés élémentaires suivantes :

a) $v_p(n)$ est l'entier k tel que p^k divise n et p^{k+1} ne divise pas n.

b) Pour tout $n \geqslant 1$ fixé, la suite $(v_p(n))_{p \in \mathcal{P}}$ est nulle à partir d'un certain rang, de sorte que l'on peut écrire $n = \displaystyle\prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)}$ (ce produit pouvant alors être considéré comme un produit fini). Cette écriture n'est alors rien d'autre que la décompostion en facteurs premiers de l'entier n.

c) Pour tous n, m entiers naturels non nuls et tout $p \in \mathcal{P}$, on a

$$v_p(nm) = v_p(n) + v_p(m)$$

Aucune preuve de ces trois résultats n'est demandée aux candidats.

A. Une estimation à la Tchebychev

I. Une minoration de la fonction π

On considère, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'entier $\Delta_n = \text{ppcm}(1, 2, \ldots, n)$. Dans cette partie nous allons établir une minoration de Δ_n. Nous en déduirons ensuite une minoration de $\pi(n)$. On considère $a, b \in \mathbb{N}$ vérifiant $1 \leqslant b \leqslant a$ et l'on pose :

$$I(b, a) = \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-b}\, \mathrm{d}x.$$

A.I.1.

A.I.1.a. Expliciter $I(1, a)$ en fonction de a.

A.I.1.b. Montrer que si $b < a$ alors $I(b+1, a) = \dfrac{b}{a-b} I(b, a)$.

A.I.1.c. En déduire que $I(b, a) = \dfrac{1}{b\binom{a}{b}}$.

A.I.2. On se propose dans cette question de donner une autre méthode pour calculer $I(b, a)$. On considère un réel $y \in [0, 1[$.

A.I.2.a. En développant à l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que :

$$\int_0^1 (1 - x + xy)^{a-1}\, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{a} \binom{a-1}{k-1} y^{k-1} I(k, a)$$

A.I.2.b. En calculant maintenant directement l'intégrale, montrer que :

$$\int_0^1 (1 - x + xy)^{a-1}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{a} y^{k-1}$$

A.I.2.c. En déduire que $I(b, a) = \dfrac{1}{b\binom{a}{b}} = \dfrac{1}{a\binom{a-1}{b-1}}$.

A.I.3.

A.I.3.a. Montrer que $I(b, a) = \sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a-b}{k} \frac{1}{k+b}$.

A.I.3.b. En déduire que $I(b, a)\Delta_a \in \mathbb{N}$.

A.I.3.c. Prouver que l'entier $b\binom{a}{b}$ divise l'entier Δ_a.

A.I.4. Soit $n \geqslant 1$ un entier.

A.I.4.a. Montrer que les entiers $n\binom{2n}{n}$ et $(2n+1)\binom{2n}{n}$ divisent l'entier Δ_{2n+1}.

(Indication : On remarquera que pour tout $k \geqslant 1$, Δ_k divise Δ_{k+1}.)

A.I.4.b. En déduire que l'entier $n(2n+1)\binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n+1}.

(Indication : On remarquera que les entiers n et $2n+1$ sont toujours premiers entre eux.)

A.I.4.c. Montrer que pour tout $k \in \{0, \ldots, 2n\}$ on a l'inégalité $\binom{2n}{k} \leqslant \binom{2n}{n}$.

A.I.4.d. En déduire que $(2n+1)\binom{2n}{n} \geqslant 4^n$.

(Indication : On développera l'égalité $4^n = (1+1)^{2n}$.)

A.I.4.e. En déduire que $\Delta_{2n+1} \geqslant n4^n$.

A.I.4.f. Montrer que si $n \geqslant 9$ alors $\Delta_n \geqslant 2^n$ et vérifier que cette inégalité est encore vraie pour $n = 7$ et 8.

A.I.5. Soit $n \geqslant 1$ un entier.

A.I.5.a. Soit $p \in \mathcal{P}$, montrer que $p^{v_p(\Delta_n)} \leqslant n$.

(Indication : On commencera par exprimer $v_p(\Delta_n)$ en fonction des entiers $v_p(1), \ldots, v_p(n)$.)

A.I.5.b. Montrer que $\Delta_n = \prod_{p \leqslant n} p^{v_p(\Delta_n)}$.

A.I.5.c. En déduire que $\Delta_n \leqslant n^{\pi(n)}$.

A.I.6.

A.I.6.a. Montrer que pour tout $n \geqslant 7$ on a

$$\pi(n) \geqslant (\ln 2)\frac{n}{\ln n}.$$

A.I.6.b. Pour quels entiers $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ l'inégalité de la question précédente est-elle encore vraie ?

II. Une majoration de la fonction π

A.II.1. On cherche dans cette question à majorer simplement le produit $\prod_{p \leqslant n} p$ en fonction de l'entier $n \geqslant 1$.

A.II.1.a. Soient a et b deux entiers tels que $0 < \frac{b}{2} \leqslant a < b$. Montrer que le produit $\prod_{a < p \leqslant b} p$ divise l'entier $\binom{b}{a}$ (le produit considéré est supposé être égal à 1 dans le cas où il n'y aurait pas de nombre premier p dans l'intervalle $]a, b]$).

A.II.1.b. En déduire que pour tout $m \geqslant 1$, le produit $\prod_{m+1 < p \leqslant 2m+1} p$ divise l'entier $\binom{2m+1}{m+1}$.

A.II.1.c. Comparer, pour $m \geqslant 1$, les entiers $\binom{2m+1}{m}$ et $\binom{2m+1}{m+1}$.

A.II.1.d. En déduire que pour tout entier $m \geqslant 1$ on a $\binom{2m+1}{m} \leqslant 4^m$.

(Indication : On développera la quantité $(1+1)^{2m+1}$.)

A.II.1.e. Montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$, on a $\prod_{m+1 < p \leqslant 2m+1} p \leqslant 4^m$.

A.II.1.f. Prouver finalement que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$\prod_{p \leqslant n} p \leqslant 4^n.$$

(Indication : On pourra montrer par récurrence, pour $n \geqslant 1$, la propriété P_n : pour tout $k \in \{1, \ldots, 2n\}$ on a $\prod_{p \leqslant k} p \leqslant 4^k$.)

A.II.2.

A.II.2.a. Montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$ on a $m! > \left(\dfrac{m}{\mathrm{e}}\right)^m$.

(Indication : On pourra penser au développement en série entière de la fonction exponentielle.)

A.II.2.b. Déduire de ce qui précède que, pour tout $n \geqslant 2$, on a $\pi(n)! \leqslant 4^n$ et que par suite, on a

$$\pi(n)\ln\pi(n) - \pi(n) \leqslant n\ln 4$$

A.II.3. On souhaite montrer, à partir du résultat précédent, que pour tout $n \geqslant 3$ on a

$$\pi(n) \leqslant \mathrm{e}\,\frac{n}{\ln n}$$

Pour cela on raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe un entier $n_0 \geqslant 3$ tel que $\pi(n_0) > \mathrm{e}\,\dfrac{n_0}{\ln n_0}$.

A.II.3.a. Montrer que la fonction $x \mapsto x\ln x - x$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. En déduire que

$$\frac{\mathrm{e} - \ln 4}{\mathrm{e}} < \frac{\ln\ln n_0}{\ln n_0}$$

A.II.3.b. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est majorée par e^{-1} sur $[1, +\infty[$. Conclure.

B. Autour d'un théorème de Mertens

I. Une formule de Legendre sur la valuation p-adique de $n!$

On considère un entier $n \geqslant 2$ et un nombre premier p. Pour tout entier $k \geqslant 0$, on considère les sous-ensembles finis U_k, V_k et Ω_k de $\mathbb{N}$ définis par

$$\begin{aligned}
U_k &= \{\, a \in \{1, \ldots, n\} \mid p^k \text{ divise } a \,\} \\
V_k &= \{\, a \in \{1, \ldots, n\} \mid p^k \text{ ne divise pas } a \,\} \\
\Omega_k &= \{\, a \in \{1, \ldots, n\} \mid v_p(a) = k \,\}
\end{aligned}$$

B.I.1. Justifier qu'il existe un plus petit entier $k_0 \geqslant 0$ tel que $n < p^{k_0}$. Montrer que $k_0 \geqslant 1$ et expliciter k_0 en fonction de n et p.

B.I.2.

B.I.2.a. Montrer que, pour tout $k \in \{0, \ldots, k_0 - 1\}$, l'ensemble U_{k+1} est strictement inclus dans U_k et que pour $k \geqslant k_0$ on a $U_k = \varnothing$.

B.I.2.b. Montrer que, pour tout $k \in \{0, \ldots, k_0 - 1\}$, l'ensemble V_k est strictement inclus dans V_{k+1} et que pour $k \geqslant k_0$ on a $V_k = \{1, \ldots, n\}$.

B.I.2.c. Prouver que la famille de parties $\{\Omega_0, \ldots, \Omega_{k_0-1}\}$ forme une partition de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.

B.I.3.

B.I.3.a. Pour tout $k \geqslant 0$, établir que $\Omega_k = U_k \cap V_{k+1}$.

B.I.3.b. Calculer, pour tout $k \geqslant 0$, $\# U_k$ et $\# V_k$ puis $\# \Omega_k$ en fonction de n, p.

B.I.4. Montrer que $v_p(n!) = \sum\limits_{k \geqslant 0} k \, \# \Omega_k$ et en déduire que

$$v_p(n!) = \sum_{k \geqslant 1} \left[\frac{n}{p^k} \right]$$

(formule de Legendre)

II. Un théorème de Mertens

Dans toute cette partie **II**, on considère un entier $n \geqslant 2$.

B.II.1. Prouver que pour tout $p \in \mathcal{P}$ on a

$$\frac{n}{p} - 1 < v_p(n!) \leqslant \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}$$

(Indication : On pourra utiliser l'encadrement $x - 1 < [x] \leqslant x$ valable pour tout réel x et la formule de Legendre.)

B.II.2. En déduire que

$$n \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p} - \sum_{p \leqslant n} \ln p < \ln n! \leqslant n \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p} + n \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p(p-1)}$$

(Indication : On pourra commencer par montrer que $n! = \prod\limits_{p \leqslant n} p^{v_p(n!)}$.)

B.II.3. Dans cette question on établit plusieurs majorations techniques utiles aux deux questions suivantes.

B.II.3.a. Montrer la convergence de la série $\sum \frac{r}{2^r}$ et prouver que $\sum\limits_{r=1}^{+\infty} \frac{r}{2^r} = 2$.

(Indication : On pourra s'intéresser à la série entière $\sum\limits_{k \geqslant 0} \frac{x^k}{2^k}$ ainsi qu'à sa série dérivée.)

B.II.3.b. Calculer pour tout entier $r \geqslant 1$ la somme finie $\sum\limits_{2^{r-1} < m \leqslant 2^r} \frac{1}{m(m-1)}$. En déduire que si l'on pose $U_r = \sum\limits_{2^{r-1} < m \leqslant 2^r} \frac{\ln m}{m(m-1)}$ alors on a $U_r \leqslant \frac{r}{2^r} \ln 2$.

B.II.3.c. Montrer que la série $\sum U_r$ converge. Donner un majorant de $\sum\limits_{r=1}^{+\infty} U_r$.

B.II.3.d. En déduire que la série $\sum \frac{\ln m}{m(m-1)}$ est convergente et que l'on a :

$$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{\ln m}{m(m-1)} \leqslant \ln 4.$$

B.II.3.e. Montrer que l' on a : $1-\frac{1}{2n} \leqslant n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant 1$ et $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geqslant \frac{1}{2n}$.

(Indication : On commencera par déterminer pour quels réels u on a les inégalités $u-u^2/2 \leqslant \ln(1+u) \leqslant u$.)

B.II.3.f. En déduire, par récurrence sur n, qu' il existe un réel $\theta_n \in [0,1]$ tel que :

$$\ln n! = n\ln n - n + 1 + \theta_n \ln n.$$

B.II.4. Prouver, en utilisant les résultats des questions B.II.2 et B.II.3, que :

$$\ln n - (1+\ln 4) < \sum_{p\leqslant n} \frac{\ln p}{p}.$$

B.II.5. De même, en utilisant les questions B.II.2, B.II.3 et A.II.1.f, montrer que :

$$\sum_{p\leqslant n} \frac{\ln p}{p} < \ln n + \ln 4.$$

En déduire que

$$\sum_{p\leqslant n} \frac{\ln p}{p} = \ln n + O(1)$$

(théorème de Mertens).

III. Le comportement asymptotique de $\left(\sum_{p\leqslant n} \frac{1}{p}\right)_n$

B.III.1. Dans cette question on établit des résultats préliminaires utiles pour la suite.

B.III.1.a. Montrer que la série $\sum \frac{1}{n\ln^2 n}$ est convergente, que la série $\sum \frac{1}{n\ln n}$ est divergente et qu'on a

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln k} = \ln\ln n + O(1)$$

(Indication : On comparera les séries considérées avec les intégrales généralisées $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\ln^2 t}$ et $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\ln t}$.)

B.III.1.b. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ définie par $u_n = \sum\limits_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln k} - \ln\ln n$. Montrer que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n^2\ln n} + o\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right).$$

B.III.1.c. En déduire qu'il existe un réel ℓ tel que

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln k} = \ln\ln n + \ell + o(1).$$

B.III.2. On note $(\psi(n))_{n\geqslant 2}$ la suite définie par $\psi(n) = \sum\limits_{p\leqslant n} \frac{\ln p}{p}$. On considère un entier $n \geqslant 3$.

B.III.2.a. Montrer que $\sum\limits_{p\leqslant n} \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n-1} \psi(k) \frac{\ln(1+1/k)}{\ln k \ln(k+1)} + \frac{\psi(n)}{\ln n}$.

(Indication : On pourra remarquer que $\sum\limits_{p\leqslant n} \frac{1}{p} = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{\delta(k)\ln k}{k} . \frac{1}{\ln k}$ où δ est la fonction caractéristique de $\mathcal{P}$, puis utiliser la transformation d'Abel sous la forme suivante : si $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(b_n)_{n\geqslant 1}$ sont deux suites numériques et si pour $n \geqslant 1$ on pose $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, alors pour tout $N \geqslant 2$, on a

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = A_N b_N + \sum_{n=1}^{N-1} A_n (b_n - b_{n+1})\,)$$

B.III.2.b. Prouver, en utilisant le théorème de Mertens, que :

$$\psi(k) \frac{\ln(1+1/k)}{\ln k \ln(k+1)} = \frac{1}{k \ln k} + O\left(\frac{1}{k \ln^2 k}\right)$$

(Indication : On commencera par écrire la fraction $\frac{\ln(1+1/k)}{\ln k \ln(k+1)}$ sous la forme $\frac{1}{\ln k} \frac{t(k)}{1+t(k)}$, où $t(k)$ est une suite qu'on déterminera. On montrera ensuite que $\frac{t(k)}{1+t(k)} = \frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{2k^2 \ln k} + o\left(\frac{1}{k^2 \ln k}\right)$.)

B.III.3. Déduire de ce qui précède qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$\sum_{p\leqslant n} \frac{1}{p} = \ln \ln n + \lambda + o(1).$$

B.III.4. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ on a $\sum\limits_{p\leqslant n} \frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k(k+1)} + \frac{\pi(n)}{n}$. En déduire que s'il existe une constante réelle c telle que $\pi(n) \underset{n}{\sim} c \frac{n}{\ln n}$ alors $c = 1$ (théorème de Tchebychev).

IV. Une application à l'étude des entiers possédant de grands facteurs premiers

Étant donné un entier $n \geqslant 2$, on note $P^+(n)$ le plus grand facteur premier apparaissant dans la décomposition en facteurs premiers de n. Par exemple, $P^+(50) = P^+(2 \cdot 5^2) = 5$. On s'intéresse dans cette question à l'ensemble A constitué des entiers $n \geqslant 2$ vérifiant $P^+(n) > \sqrt{n}$ (c'est ce qu'on entend par *entiers possédant de grands facteurs premiers* dans le titre de cette partie). L'objectif de cette partie est de montrer que l'ensemble A possède une *densité* valant $\ln 2$. En d'autres termes, si pour un réel $x \geqslant 2$ on pose $A(x) = A \cap [0, x]$ et $a(x) = \#A(x)$ le cardinal de $A(x)$, nous allons montrer que la suite $\left(\frac{a(n)}{n}\right)_n$ possède une limite (on dira alors que A possède une *densité*) et que cette limite vaut $\ln 2$ (qui sera donc appelée la *densité* de A). Ce résultat signifiera que, « moralement », il y a une proportion de $\ln 2 \approx 0{,}69$ d'entiers dans $\mathbb{N}$ qui possèdent de grands facteurs premiers.

B.IV.1. En utilisant la question B.III.3 montrer que la suite $\left(\sum_{\sqrt{n}<p\leqslant n} \frac{1}{p}\right)_n$ possède une limite et donner cette limite.

B.IV.2. Soit $x \geqslant 2$ un réel.

B.IV.2.a. Soient $p \in \mathcal{P}$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $n = mp$. Montrer que

$$(p = P^+(n) \text{ et } n \in A(x)) \Longleftrightarrow m < p \leqslant x/m.$$

B.IV.2.b. Soient $p, p' \in \mathcal{P}$ et $m, m' \in \mathbb{N}^*$ tels que $m < p \leqslant x/m$ et $m' < p' \leqslant x/m'$. Montrer que

$$mp = m'p' \Longleftrightarrow (p = p' \text{ et } m = m').$$

B.IV.2.c. En déduire que les entiers de la forme mp avec $p \in \mathcal{P}$, $m \in \mathbb{N}^*$, et vérifiant $m < p \leqslant x/m$ décrivent de manière biunivoque l'ensemble $A(x)$.

B.IV.2.d. Prouver finalement que

$$a(x) = \sum_{p\leqslant x} \min\left(p-1, \left[\frac{x}{p}\right]\right)$$

B.IV.3. Soit $x \geqslant 1$ un réel.

B.IV.3.a. Montrer que pour tout nombre premier p, on a l'équivalence

$$p - 1 \leqslant [x/p] \Longleftrightarrow p \leqslant \varphi(x)$$

où $\varphi(x) = \dfrac{1+\sqrt{1+4x}}{2}$.

B.IV.3.b. Montrer que $\sqrt{x} < \varphi(x) < \sqrt{x} + 1$.

B.IV.3.c. En déduire que $a(x) = \sum_{p\leqslant\sqrt{x}} (p-1) + \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} [x/p]$.

(Indication : On examinera le cas où il existe un nombre premier dans l'intervalle $]\sqrt{x}, \varphi(x)]$ et le cas où il n'en existe pas.)

B.IV.3.d. En utilisant les encadrements obtenus dans la partie A, démontrer que $\sum_{p\leqslant\sqrt{x}} (p-1) = o(x)$.

B.IV.3.e. En utilisant la question B.IV.1 et les encadrements obtenus dans la partie A, montrer que $\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \left[\frac{x}{p}\right] = x\ln 2 + o(x)$.

B.IV.3.f. En déduire que $a(x) = x\ln 2 + o(x)$ et conclure.

FIN DE L'ÉPREUVE

Un peu d'histoire...

La notion de nombre premier est fondamentale en arithmétique des entiers. Très tôt dans l'histoire de l'esprit humain, en fait dès l'antiquité, on s'est intéressé à ces nombres. On savait depuis cette époque qu'ils étaient en nombre infini (théorème d'Euclide [7]). Au cours des âges on s'est intéressé en particulier à leur mystérieuse répartition. Il faudra réellement attendre le XIX$^{\text{e}}$ siècle pour qu'on dispose d'idées et d'outils suffisamment sophistiqués pour mieux comprendre cette problématique. Une première série d'idées importantes sur le sujet fut introduite par Tchebychev. En 1845 Bertrand [8] conjectura que pour tout entier $n \geqslant 2$ il existait toujours un nombre premier compris strictement entre n et $2n$. Il vérifia sa conjecture jusqu'au rang $n = 3\,000\,000$, mais il appartient à Tchebychev de la démontrer en 1851. Pour ce faire il entreprit de trouver des encadrements (qu'on appelle maintenant *encadrements à la Tchebychev*) de la fonction $\pi(n)$. Ces encadrements sont de la forme

$$\alpha \frac{n}{\ln n} < \pi(n) < \beta \frac{n}{\ln n}$$

pour $n \geqslant n_0$ effectif. L'objectif était de trouver des constantes α, β les plus proches possibles de 1 pour pouvoir conclure. Il y arrivera en montrant que cette inégalité est vraie pour $\alpha \approx 0{,}92$ et $\beta \approx 1{,}1$. Dans la partie A de ce sujet nous établissons un tel encadrement mais avec des constantes ($\alpha \approx 0{,}69$ et $\beta \approx 2{,}72$) trop éloignées de 1 pour pouvoir conclure sur la conjecture de Bertrand. Ceci est dû aux méthodes d'encadrement utilisées. À ce sujet, signalons que la méthode de minoration de $\pi(n)$ proposée en A.I repose sur la minoration effective de $\operatorname{ppcm}(1, \ldots, n)$ par 2^n. Cette méthode de minoration de $\operatorname{ppcm}(1, \ldots, n)$ est récente puisqu'elle date de 1982, elle est due à Nair. La majoration de $\pi(n)$ proposée en A.II repose sur la majoration effective de $\prod\limits_{p \leqslant n} p$ par 4^n. Cette méthode de majoration de $\prod\limits_{p \leqslant n} p$ est due à Erdős [9] et date de 1939.

Les encadrements à la Tchebychev laissent suggérer l'existence d'un lien étroit, en termes de comportement asymptotique, entre $\pi(n)$ et $\frac{n}{\ln n}$. En fait, il avait longtemps été conjecturé, notamment par Gauß [10] et Legendre, que l'on avait l'équivalence (théorème des nombres premiers) : $\pi(n) \underset{n}{\sim} \dfrac{n}{\ln n}$

Il appartiendra à Hadamard [11] et de la Vallée-Poussin [12] de montrer (de manières indépendantes) ce résultat en 1896, confirmant ainsi la conjecture. Leur approche du problème fut la même et utilise l'analyse complexe. Elle repose sur l'étude sur la droite de partie réelle 1 de la fonction ζ de Riemann [13]. Pendant plusieurs années les experts, en particulier Hardy [14], ont pensé qu'une preuve du théorème des nombres premiers ne pouvait se dispenser de l'analyse complexe, tant il semblait que ce théorème était intrinsèquement lié aux propriétés de la fonction ζ. Pourtant en 1949 Erdős et Selberg [15] en proposèrent une preuve élémentaire (c'est-à-dire, n'utilisant pas d'analyse complexe). Daboussi a proposé en 1984 une nouvelle preuve élémentaire de ce théorème. Les considérations utilisées dans ces preuves élémentaires sont du même acabit que celles présentées dans ce sujet (en plus sophistiquées bien sûr, vu l'ampleur du résultat démontré).

On peut considérer que le théorème de Tchebychev dont il est question dans ce sujet fut historiquement l'une des premières avancées significatives vers le théorème des nombres premiers.

---

7. Euclide, mathématicien probablement d'origine grecque, ≈ 330 av. J.-C. – ≈ 275 av. J.-C.
8. Joseph Louis François Bertrand, mathématicien français, Paris 1822 – Paris 1900.
9. Pál Erdős, mathématicien hongrois, Budapest 1913 – Varsovie 1996.
10. Carl Friedrich Gauß, mathématicien allemand, Brunswick 1777 – Göttingen 1855.
11. Jacques Salomon Hadamard, mathématicien français, Paris 1865 – Auteuil 1963.
12. Charles Jean de La Vallée-Poussin, mathématicien belge, Louvain 1866 – Boitsfort 1962.
13. Georg Friedrich Bernhard Riemann, mathématicien allemand, Breselenz 1826 – Selasca 1866.
14. Godfrey Harold Hardy, mathématicien anglais, Cranleigh 1877 – Cambridge 1947
15. Atle Selberg, mathématicien norvégien, Langesund 1917.

2.4 Description de la seconde épreuve

Il s'agissait d'une épreuve de théorie des nombres. Le sujet s'intéressait au fameux problème du comportement de la fonction $\pi(x)$. Il se divisait en deux grandes parties A et B.

Dans la partie A on établissait, en deux sous-parties A.I et A.II, l'encadrement suivant

$$(\ln 2)\frac{n}{\ln n} \leqslant \pi(n) \leqslant \mathrm{e}\,\frac{n}{\ln n}$$

valable pour tout $n \geqslant 3$. La partie A.I était consacrée à la minoration et utilisait une méthode élémentaire, récente et très originale, due à Nair. Cette méthode repose sur l'étude d'une propriété arithmétique liant la fonction $\mathrm{ppcm}(1, 2, \ldots, n)$ et la famille d'intégrales $\left(\int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-b}dx\right)_{a,b}$. La partie A.II était consacrée à la majoration. Cette dernière utilisait une méthode classique, due à Erdős, qui consiste à remarquer que le produit $\prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p$ divise le coefficient binomial $\binom{2m+1}{m+1}$. Il est à noter que la constante e obtenue pour la majoration est uniquement donnée dans ce texte pour simplifier les calculs de la question A.II.3. On peut en effet très simplement, par la méthode présentée, remplacer la constante e par $\ln 4 + \varepsilon$. La partie A utilisait de l'arithmétique des entiers (divisibilité et lemme de Gauß) et un petit peu d'analyse (calculs simples d'intégrales et étude de fonctions).

La partie B était principalement consacrée à la formule de Mertens et son application à l'étude asymptotique de $\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}$. Le but de cette partie était de montrer que s'il existe un réel $c > 0$ telle que $\pi(n) \simeq_n c\frac{n}{\ln n}$ alors nécessairement $c = 1$ (théorème de Tchebychev, première avancée historique vers le théorème des nombres premiers). Ce résultat permet de préciser le lien asymptotique entre les fonctions $\pi(x)$ et $\frac{x}{\ln x}$ que laisse suggérer la partie A. Elle était composée de quatre sous-parties B.I–IV.

Dans la partie B.I on établissait la formule de Legendre qui donne une expression, sous la forme d'une somme, de la valuation p-adique $v_p(n!)$ de $n!$. Cette partie utilisait essentiellement de la théorie des ensembles (unions, intersections, partitions, cardinalité, dénombrement).

Dans la partie B.II on établissait la formule de Mertens en partant de l'encadrement de $v_p(n!)$ obtenu grâce à la formule de Legendre. Les outils de cette partie sont essentiellement analytiques (séries, sommation par paquet, encadrement explicite de suites).

La partie B.III appliquait la B.II pour trouver un développement asymptotique de $\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}$. La preuve du théorème de Tchebychev s'obtenait alors à partir de ce développement en utilisant une sommation d'Abel. Les outils de cette partie sont analytiques et plus sophistiqués (comparaison séries-intégrales, intégrales et séries de Bertrand, développements asympotiques, formule sommatoire d'Abel).

La partie B.IV s'intéressait à l'étude de la densité de l'ensemble des entiers possédant de grands facteurs premiers. Il s'agissait d'un exemple d'application de la formule asympotique trouvée en B.III. Cette partie utilisait de l'arithmétique des entiers et un peu d'analyse.

Le sujet a été conçu pour ne présenter que des questions élémentaires. Hormis peut-être la partie B.III, les connaissances requises pour traiter le sujet n'excèdent pas celles du premier cycle universitaire. Les questions étaient très détaillées et le plus souvent accompagnées d'indications aidant à leur résolution. Ce parti-pris dans la conception du sujet a permis à une grosse proportion de candidats de bien « rentrer » dans le sujet et d'écrire un certain nombre de choses. La sélection s'est opérée sur la rigueur et le soin donné à la résolution des questions (certaines d'entre elles nécessitant des arguments un peu soignés) ainsi que sur le niveau global de connaissances et de pratique des candidats.

2.5 Analyse des prestations de la seconde épreuve

Beaucoup de candidats (la majorité) ont abordé les parties A.I–II et B.I et n'ont pas été vraiment plus loin, bien que quelques-uns parmi eux aient tenté de grapiller des points en attaquant les questions simples des parties suivantes. Il faut signaler quelques très rares copies qui ont abordé correctement les parties B.II–III. Personne n'a vraiment touché à la partie B.IV.

Partie A.I

Les questions A.I.1.a–c étaient très simples et n'ont présenté aucun problème.

Les questions A.I.2.a–b étaient un peu plus compliquées mais restaient calculatoires. Elles ont été aussi globalement bien traitées.

La question A.I.2.c nécessitait un argument polynomial pour permettre d'identifier les coefficients. Cette question, souvent abordée, a fait le tri : assez peu de candidats ont pris soin d'argumenter proprement. Il est à noter aussi pour cette question que, malgré les précautions prises au début de la question A.I.2, certains candidats ont utilisé les résultats de la question A.I.1 pour démontrer la dernière égalité.

Les questions A.I.3.a–c ont été souvent abordées et généralement bien traitées.

La question A.I.4.a a été moins souvent abordée, mais généralement ceux qui l'ont traitée ont bien pris le soin de démontrer l'indication.

La question A.I.4.b a posé problème à un certain nombre de candidats. L'utilisation du théorème de Gauß est restée confuse.

La question A.I.4.c n'a pratiquement pas été traitée et pourtant plusieurs candidats signalent qu'il s'agit là d'un « résultat bien connu » !

Les questions A.I.4.d–e ont généralement été bien traitées par ceux qui les ont abordées.

La question A.I.4.f a souvent été mal traitée. Peu de candidats ont réussi à bien différencier les cas pair et impair.

Les candidats ayant abordé la question A.I.5.a ont souvent bien détaillé l'indication, mais peu d'entre eux ont su l'appliquer proprement à la question.

La question A.I.5.b a sûrement présenté un problème de formalisme : les candidats n'ont pas bien compris ce qu'il y avait à démontrer.

Bon traitement de la question A.I.5.c pour ceux qui l'ont abordée.

La question A.I.6.a est une question de synthèse bien traitée.

La question A.I.6.b a été étonnamment bien traitée, les candidats ayant pris soin de mener à bien les calculs.

Partie A.II

La question A.II.1.a n'a pratiquement jamais été traitée convenablement.

La question A.II.1.b a été en revanche bien traitée.

Les questions A.II.1.c–e n'ont pas présenté trop de problèmes.

La question A.II.1.f a été très mal traitée, les candidats n'arrivant pas à présenter de manière rigoureuse la récurrence.

Les questions A.II.2.a–b ont été peu abordées et souvent mal traitées.

Les questions A.II.3.a–b ont eu plus de succès.

Partie B.I

Dans la question B.I.1, assez peu de candidats arrivent à expliciter l'entier k_0.

La question B.I.2.a fut mieux abordée.

Question B.I.2.b : curieusement les candidats ayant abordé la question précédente ont recommencé tout le travail pour celle-ci sans se rendre compte qu'un passage au complémentaire permettait de conclure.

Question B.I.2.c : réponses souvent confuses, la notion de partition ne semblant pas bien maîtrisée.

La question B.I.3.a a été globalement bien traitée par ceux qui l'ont abordée.

Question B.I.3.b : presque aucun candidat n'arrive à donner une expression de ces cardinaux.

La question B.I.4 a été peu traitée et souvent mal.

3 SUJETS ET ANALYSE DES ÉPREUVES ORALES

3.1 Liste des exposés (première épreuve orale)

1. Utilisation d'arbres, de tableaux, de diagrammes pour des exemples de dénombrement. Dénombrement des arrangements et des permutations.
2. Exemples de problèmes dont la résolution fait appel à l'utilisation de graphes, orientés ou non.
3. Coefficients binomiaux, dénombrement des combinaisons, formule du binôme. Applications.
4. Description mathématique d'une expérience aléatoire : événements élémentaires, événements, probabilité (on se limitera au cas où l'ensemble d'événements élémentaires est fini).
5. Probabilité conditionnelle ; indépendance de deux événements (on se limitera au cas où l'ensemble d'épreuves est fini). Applications à des calculs de probabilité.
6. Variable aléatoire à valeurs réelles dont l'ensemble des valeurs est fini. Loi de probabilité. Espérance mathématique, variance. Exemples.
7. Schéma de Bernoulli et loi binomiale. Exemples.
8. Séries statistiques à deux variables numériques. Nuage de points associé. Ajustement affine par la méthode des moindres carrés. Droites de régression. Applications. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
9. Propriétés axiomatiques de $\mathbb{N}$. Construction de $\mathbb{Z}$.
10. Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$, unicité du quotient et du reste. Applications. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
11. PGCD de deux entiers naturels. Nombres premiers entre eux. Applications. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
12. Sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$. Égalité de Bézout. Résolution dans $\mathbb{Z}$ d'une équation de la forme $ax + by = c$.
13. Nombres premiers ; existence et unicité de la décomposition d'un nombre en facteurs premiers. Infinitude de l'ensemble des nombres premiers. Exemple(s) d'algorithme(s) de recherche de nombres premiers. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
14. Congruences dans $\mathbb{Z}$. Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
15. Construction du corps $\mathbb{Q}$ des rationnels. Propriétés.
16. Construction du corps $\mathbb{C}$ des complexes. Propriétés.
17. Module et argument d'un nombre complexe. Interprétation géométrique, lignes de niveau associées. Applications.
18. Interprétation géométrique des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par $z \mapsto z + b$, $z \mapsto az$ et $z \mapsto \overline{z}$, où a et b appartiennent à $\mathbb{C}$, a non nul. Exemples d'application à l'étude de configurations géométriques du plan.
19. Étude de la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f : z \mapsto \dfrac{z-a}{z-b}$, où a, b, z sont complexes. Lignes de niveau pour le module et l'argument de la fonction f. Applications.

20. Racines n-ièmes d'un nombre complexe. Interprétation géométrique. Applications.
21. Définition vectorielle d'une droite du plan, d'une droite et d'un plan de l'espace. Représentations paramétriques. Génération des demi-droites, des segments. Parallélisme.
22. Équation cartésienne d'une droite du plan. Problèmes d'intersection, parallélisme. Condition pour que trois droites soient concourantes.
23. Droites et plans dans l'espace. Positions relatives ; plans contenant une droite donnée.
24. Théorème de Thalès. Applications à la géométrie du plan et de l'espace.
25. Définition et propriétés du barycentre de n points pondérés. Application à l'étude de configurations du plan ou de l'espace.
26. Homothéties et translations ; transformation vectorielle associée. Effet sur l'alignement, les directions, les distances... Applications à l'action sur les configurations usuelles.
27. Composées d'homothéties et de translations du plan. Groupe des homothéties-translations. Applications.
28. Projection orthogonale sur une droite du plan, projection vectorielle associée. Applications (calculs de distances et d'angles, optimisation...).
29. Définition et propriétés du produit scalaire dans le plan ; expression dans une base orthonormale. Application au calcul de distances et d'angles.
30. Le cercle. Positions relatives d'une droite et d'un cercle, de deux cercles. Point de vue géométrique et point de vue analytique. Lien entre les deux points de vue.
31. Théorème de l'angle inscrit. Cocyclicité. Applications.
32. Relations métriques dans un triangle rectangle. Trigonométrie. Applications.
33. Relations métriques et trigonométriques dans un triangle quelconque. Applications.
34. Droites remarquables du triangle : bissectrices, hauteurs, médianes, médiatrices... (dans l'ordre que l'on voudra).
35. Produit vectoriel dans l'espace euclidien orienté de dimension trois. Point de vue géométrique, point de vue analytique. Applications.
36. Applications du produit scalaire et du produit vectoriel dans l'espace orienté : calculs de distances, d'aires, de volumes, d'angles...
37. Orthogonalité dans l'espace affine euclidien : droites orthogonales, droite orthogonale à un plan, plans perpendiculaires. Applications.
38. Réflexion du plan échangeant deux points donnés ; médiatrice, régionnement associé. Applications au triangle et au cercle (cercle circonscrit, angle inscrit...).
39. Réflexions du plan échangeant deux droites sécantes données, bissectrices. Applications au triangle et au cercle (cercle inscrit, tangentes à un cercle...).
40. Recherche des isométries du plan conservant un carré, un losange, un parallélogramme, un rectangle (dans l'ordre que l'on voudra).
41. Rotations planes. Notion d'angle. (On pourra traiter ces notions dans l'ordre que l'on voudra.)

42. Groupe des isométries du plan : décomposition d'une isométrie en produit de réflexions, groupe des déplacements, classification des isométries à partir de l'ensemble des points invariants.
43. Étude des transformations du plan euclidien qui conservent les rapports de distances.
44. Recherche des isométries du plan conservant un polygone régulier ; exemples (triangle équilatéral, carré, hexagone, octogone...).
45. Réflexion de l'espace échangeant deux points donnés ; plan médiateur, régionnement associé. Étude des isométries de l'espace ayant une droite de points invariants.
46. Réflexions et rotations de l'espace. Effet sur les distances, les angles... Applications à l'action sur les configurations usuelles.
47. Courbes définies par des équations paramétriques dans le plan. Vecteur dérivé et tangente ; interprétation cinématique.
48. Définitions de la parabole, géométriquement et par équation réduite ; équivalence entre ces définitions. Construction de la tangente et de la normale en un point.
49. Définitions de l'ellipse, géométriquement et par équation réduite ; équivalence entre ces définitions.
50. Définitions de l'hyperbole, géométriquement et par équation réduite ; équivalence entre ces définitions.
51. Exemples de représentation paramétrique des coniques ; constructions de la tangente et de la normale en un point à une parabole, une ellipse, une hyperbole.
52. Suites monotones, suites adjacentes. Approximation d'un nombre réel, développement décimal. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
53. Suites convergentes. Opérations algébriques, composition par une application continue. Limites et relation d'ordre.
54. Suites divergentes. Cas des suites admettant une limite infinie : comparaison, opérations algébriques, composition par une application.
55. Étude des suites de terme général a^n, n^b et $n!$ $(a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*)$. Croissances comparées. Exemples de comparaison de suites aux suites précédentes. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
56. Étude de suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et une condition initiale. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
57. Exemples d'étude de la rapidité de convergence d'une suite réelle $(u_n)_n$ vers une limite ℓ : Cas où $|u_n - \ell|$ est dominé par n^{-a}, par q^n... L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
58. Limite finie d'une fonction à valeurs réelles en un point a de $\mathbb{R}$. Opérations algébriques sur les limites. Continuité d'une fonction en un point. Exemples.
59. Limite à l'infini d'une fonction à valeurs réelles. Branches infinies de la courbe représentative d'une fonction. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

60. Image d'un intervalle par une fonction continue, cas d'un segment. Cas d'une fonction continue strictement monotone.
61. Dérivée en un point, meilleure approximation affine, interprétation géométrique. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
62. Fonctions dérivées. Opérations algébriques. Dérivée d'une fonction composée. Exemples.
63. Fonction réciproque d'une fonction strictement monotone sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Étude de la continuité, de la dérivabilité. Exemples.
64. Comparaison des fonctions : domination, prépondérance, équivalence. Exemples et applications.
65. Inégalité des accroissements finis. Exemples d'applications à l'étude de suites et de fonctions. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
66. Théorème de Rolle. Applications.
67. Formules de Taylor. Applications.
68. Développements limités, opérations sur les développements limités.
69. Fonctions polynômes.
70. Fonctions logarithmes.
71. Fonctions exponentielles.
72. Croissance comparée des fonctions réelles $x \mapsto e^x$, $x \mapsto x^a$ et $x \mapsto \ln(x)$ au voisinage de $+\infty$. Applications. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
73. Caractérisation des fonctions exponentielles réelles par l'équation fonctionnelle : $f(x+y) = f(x) \times f(y)$.
74. Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.
75. Applications de la dérivation à l'étude des extrémums éventuels d'une fonction numérique d'une variable réelle. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
76. Primitives d'une fonction continue sur un intervalle ; définition et propriétés de l'intégrale, inégalité de la moyenne. Applications.
77. Intégration par parties, par changement de variable. Exemples et applications.
78. Diverses méthodes de calcul approché d'intégrales définies. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
79. Méthodes d'approximation des zéros d'une fonction numérique réelle. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
80. Étude des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants. Exemples.
81. Exemples d'approximation d'une solution d'une équation différentielle par la méthode d'Euler. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

3.2 Liste des sujets de l'épreuve sur dossier (seconde épreuve orale)

date	thème	
28 juin	Équations différentielles	
29 juin	Outils	Calcul vectoriel
30 juin	Suites	Étude du comportement de suites définies par une relation de récurrence du type : $u_{n+1} = f(u_n)$
1er juillet	Arithmétique	
2 juillet	Probabilités	
3 juillet	Problème de lieu	
4 juillet	Analyse	Fonctions et équations
5 juillet	Problèmes d'incidence	
10 juillet	Divers types de raisonnements (par l'absurde, par récurrence...).	
11 juillet	Problèmes de calcul de grandeurs	Calculs de longueurs, d'aires et de volumes
12 juillet	Intégration	Calcul d'intégrales par des méthodes variées
13 juillet	Géométrie	Interprétation géométrique des nombres complexes
14 juillet	Probabilités	
15 juillet	Problèmes sur les configurations	
16 juillet	Intégration	
17 juillet	Géométrie	Problèmes de recherche de lieux géométriques
18 juillet	Géométrie	Interprétation géométrique des nombres complexes

3.3 Analyse des épreuves orales

Les épreuves orales ont été définies par un arrêté ministériel du 30 avril 1991 modifié par un arrêté du 3 août 1993. Les instructions les concernant ont été publiées dans le B.O. spécial n° 5 du 21 octobre 1993. Les objectifs communs aux deux épreuves orales sont précisés dans ces paragraphes, extraits des textes cités :

Les épreuves orales visent d'abord à évaluer la capacité à concevoir, mettre en forme et analyser une séquence d'enseignement sur un thème donné. A l'exception des quelques sujets d'exposé (première épreuve) où il est fait référence au programme complémentaire, il convient de se placer au niveau de l'enseignement secondaire, c'est-à-dire de ne pas dépasser le niveau du baccalauréat. Le candidat peut cependant être amené à faire appel aux connaissances acquises dans ses études supérieures pour analyser et commenter la démarche suivie, éclairer un point conceptuel ou technique et situer la question dans son contexte mathématique et scientifique. La mise en valeur de l'enchaînement des étapes du raisonnement constitue un objectif majeur. Les candidats ne doivent en aucun cas se borner à l'exposé, si parfait soit-il *formellement, d'une liste de définition, de théorèmes, d'exemples et d'exercices : il est indispensable de dégager l'articulation mutuelle des divers éléments.*

3.3.1 Commentaires sur la première épreuve

On rencontre de très belles prestations, mais aussi les plus mauvaises. Les conseils qui suivent se tiennent volontairement à l'écart d'une collection de « perles » ; leur étude doit permettre à tout candidat d'améliorer sa performance, et en même temps ses capacités à exercer le métier d'enseignant.

Modalités pratiques

Rappelons brièvement le déroulement de cette épreuve. Le candidat tire au sort une enveloppe contenant deux sujets. Il devra choisir l'un des deux sujets et disposera de deux heures pour sa préparation, sans document ; le candidat n'annoncera son choix que lors de sa parution devant le jury.

L'épreuve se déroule en deux phases : présentation de la leçon et questions du jury.

• La présentation de la leçon dure 25 minutes, sans interruption du jury. Cette première phase consiste à exposer un plan et à effectuer les démonstrations des propositions énoncées. Le plan doit être aussi riche que possible et peut contenir des exemples, contre-exemples et applications des outils introduits. Le candidat peut gérer son tableau à sa guise, néanmoins il serait bon de réserver une partie du tableau pour faire les démonstrations de manière à ce qu'à la fin l'ensemble du plan figure au tableau. Nous rappelons que cette partie ne fait pas un bon effet si elle se réduit à une recopie mot à mot des notes que l'on lit.

• La seconde phase, d'une durée de 20 minutes, est réservée aux questions du jury. Ces questions peuvent être de divers ordres :

• rectifier certaines erreurs ou préciser certains points obscurs dans le plan ou dans les démonstrations.

• vérifier la maîtrise et le recul du candidat sur le sujet traité. En particulier, le candidat est censé répondre sur tous les points présentés dans son plan ainsi qu'à toutes questions relatives au sujet, qu'il aurait omises volontairement ou non.

Remarques sur l'épreuve

D'une manière générale le jury souhaiterait encourager les futurs candidats à donner une touche personnelle à leurs plans, ceci ne peut se faire qu'au prix d'un travail régulier et approfondi durant l'année de préparation. Il n'est pas possible pendant les deux heures de préparation de monter une bonne leçon si le sujet n'a pas été travaillé pendant l'année de préparation au concours. Il est par ailleurs risqué de laisser de trop grandes brèches ou « impasses » ; on voit des candidats déstabilisés devant un choix comportant deux sujets fort classiques, ce qui indique a priori que des chapitres entiers ont été ignorés pendant l'année de préparation.

Sur le plan

Les plans doivent être structurés plus rigoureusement, en particulier :

• la chronologie est essentielle, elle montre la vue d'ensemble du candidat par rapport à son sujet et permet d'éviter les répétitions et les cercles vicieux.

• Le statut des énoncés est important et parfois joue un rôle important dans la qualité de la leçon : bien différencier une définition d'une proposition, un corollaire d'un théorème fondamental, etc. Par ailleurs il est important de savoir faire ressortir les points les plus importants, en les distinguant d'autres points secondaires. Pour illustrer cette idée, on peut exposer le cas d'une leçon abordant la convergence des suites de nombres réels : on peut annoncer la proposition « Une suite croissante de nombres réels est convergente si, et seulement si, elle est majorée » Mais la proposition « Toute suite convergente est majorée » est une conséquence élémentaire des définitions alors que la proposition « Toute suite de nombres réels croissante et majorée est convergente » qui repose sur le théorème de la borne supérieure (fondement des nombres réels) est bien plus profonde. Ainsi, du point de vue de la genèse des idées, le plan correspondant gagnera en clarté si ces deux énoncés sont présentés séparément et hiérarchiquement.

• Les définitions et les énoncés des propositions ou théorèmes doivent être écrits dans leur intégralité ; si le candidat n'écrit qu'une version abrégée, il doit s'attendre à ce que le jury lui demande une version détaillée et complète. Pour économiser du temps d'écriture, le candidat peut éventuellement utiliser des transparents.

Les plans peuvent être enrichis :

• en introduisant de nombreux exemples et contre-exemples bien choisis montrant pour les théorèmes à la fois, leur impact, la nécessité des hypothèses, les limites à leur application : un simple énoncé correct, c'est évidemment bien ; des développements tels que ceux qui viennent d'être décrits montrent que le candidat possède du recul, et une connaissance en profondeur du sujet traité.

• en donnant de nombreuses applications, y compris des applications transversales au sens où elles concernent, soit des domaines mathématiques différant du domaine usuel dans lequel s'inscrit le sujet, soit plus largement des domaines issus d'autres sciences, sciences physiques, astronomie, sciences naturelles, etc.

• en montrant des figures. En géométrie cela semble le plus naturel, mais un dessin peut se révéler très utile aussi dans les autres domaines, et particulièrement en analyse. Les figures géométriques peuvent être réalisées à main levée, ou aux instruments, ou encore préparées sur des transparents, ou enfin sur le logiciel de géométrie de la calculatrice. Il revient au candidat de choisir la méthode qui met le mieux en valeur son travail et ses compétences ; de belles figures réalisées à la main resteront appréciées pour leur élégance ; à l'opposé, des figures bien présentées à la calculatrice, éventuellement animées, témoigneront des capacités du candidat à utiliser les moyens mis à sa disposition, et à s'investir ultérieurement dans l'utilisation des TICE.

Le candidat choisit le niveau auquel il place son exposé. En conséquence :

• sa prestation lors de l'exposé doit rester cohérente avec le niveau qu'il a choisi.

• s'il aborde les diverses notions de manière trop élevée sur le plan « théorique », le jury cherchera à vérifier la solidité de l'exposé au niveau correspondant, et il essayera de faire revenir le candidat aux aspects plus concrets et aux applications plus simples.

• s'il aborde le sujet à un niveau trop faible, le jury ne se satisfera pas de devoir rester à ce niveau, ce qui amène parfois certains (surtout s'ils écoutent mal les questions par la suite) à quitter le jury inconscients de leur médiocre performance.

Sur les démonstrations

ll arrive trop souvent que des candidats présentent un plan sans aucune démonstration. Cette manière de préparer l'épreuve est à proscrire. Rappelons que le candidat est jugé sur le contenu de son plan mais aussi sur sa prestation notamment au cours des démonstrations qui sont faites, en particulier la pertinence du choix des points démontrés par rapport au sujet et la consistance de ceux-ci sont un élément important d'appréciation. Cette exigence renforce la nécessité, pour le candidat, de disposer d'un minimum de recul par rapport aux connaissances présentées, recul nécessaire pour l'aider à trouver quels sont véritablement les « points forts » de son exposé.

D'une manière générale, il est conseillé :

• De choisir le développement d'un ou de plusieurs points consistants, centraux par rapport au sujet, permettant de montrer son aptitude à raisonner sur les notions étudiées.

• De montrer ses qualités pédagogiques en s'efforçant de donner la présentation la plus naturelle possible (l'utilisation de figures est recommandée chaque fois que cela est possible), faisant ressortir clairement la démarche scientifique utilisée et en mettant bien en relief les points cruciaux des différentes preuves ; beaucoup de candidats se contentent d'aligner une suite de raisonnements, présentés artificiellement, sans être capable d'expliquer l'origine de leurs motivations.

• De bien vérifier l'absence de lacune dans l'enchaînement logique de la démonstration ; il arrive souvent qu'un candidat se trouve complètement désarçonné lorsqu'on lui demande d'éclaircir certains passages, ce qui lui fait découvrir des difficultés qui lui avaient échappé.

Sur les questions du jury

Les questions du jury peuvent porter aussi bien sur la conception, l'organisation du plan, que sur les démonstrations, abordées ou non, au cours de l'exposé. Elles peuvent également porter sur les pré-requis ou concerner certains prolongements omis, soit pour s'assurer de la solidité des connaissances, soit pour compléter un plan trop pauvre.

Nous insistons sur le fait qu'il est essentiel que les candidats aient un certain recul sur les notions qu'ils devront enseigner et ne peuvent donc en aucun cas se contenter de ne connaître que ce qui est exigible pour un élève du secondaire actuel. Par exemple, s'il est normal d'admettre lors d'un exposé le théorème « Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle », il est insuffisant de la part du titulaire d'une licence qu'il n'ait pas la moindre idée sur les propriétés permettant ce résultat. De même, si la définition rigoureuse des angles est hors de portée d'un élève, il n'est pas acceptable qu'un futur enseignant n'y ait jamais réfléchi au point d'être incapable de fournir la moindre piste pour attaquer ce délicat problème, ou plus grave, ne pas sembler comprendre l'importance de la question qui se pose.

L'entretien commence le plus souvent par la mise au point et la correction d'erreurs de détail, notamment de lapsus ou d'erreurs bénignes, de confusions de notation, etc. Le candidat ne doit pas penser que ces questions constituent des pièges. Dans la suite de l'entretien, il est important d'écouter réellement les questions : d'une part, une question mal écoutée et à laquelle on répond de manière précipitée risque de se conclure par des réponses inadaptées, et une situation défavorable au candidat ; d'autre part, on attend du futur professeur qu'il écoute et analyse les questions de ses futurs élèves, et pour cela, il lui faudra aussi « savoir écouter ».

Les questions ne sont pas de niveau constant : le jury peut souhaiter, par des questions très élémentaires, mettre le candidat en confiance ; par des questions plus profondes, il peut souhaiter donner au candidat la possibilité de montrer qu'il dispose de recul par rapport au sujet traité. Une erreur, une réponse erronée n'est pas nécessairement catastrophique : si le candidat, alerté par d'autres questions du jury, s'aperçoit de son erreur et est capable de la corriger, il laissera l'impression positive d'un futur enseignant capable de réagir valablement lorsqu'il est en difficulté.

3.3.2 Commentaires sur la seconde épreuve

L'exposé du candidat

Jouer la montre lors de l'exposé n'est pas pertinent ; le jury reporte le temps non utilisé pour l'exposé sur la seconde partie de l'épreuve, et si le candidat remplit son temps d'exposé en résolvant en détail un exercice — celui proposé par le jury ou un autre — le jury ne peut intervenir pendant cette résolution. Faire un exposé plus court que les 25 minutes maximales autorisées n'est pas considéré comme une faute. Remplir les 25 minutes en traitant des points non demandés expose le candidat au risque d'être interrogé de manière plus exigeante et plus rapide puisque le jury aura moins de temps pour l'entretien. Bien entendu, un exposé de qualité long de 25 minutes est parfaitement pris en compte et joue en faveur du candidat lorsqu'il est conforme à la définition de l'épreuve.

Interprétation du thème par les candidats, « hors-sujet »

On rappelle que l'énoncé du thème est à prendre au sens littéral de la cartouche figurant en tête du dossier. Trop de candidats, par frilosité, n'ont pas osé s'éloigner de l'exercice proposé par le jury alors même que celui-ci ne couvrait qu'une faible partie du thème. Ils se contentaient de proposer parfois de simples démarquages de l'exercice proposé par le jury.

Il a aussi été noté que trop de candidats n'osaient pas varier le niveau des exercices qu'ils proposent. Certains dossiers suggèrent fortement cette ouverture, notamment par le moyen des extraits de programmes qui y sont attachés.

Équilibre des différents éléments de l'épreuve

La présidence du concours était très attentive à ne pas laisser le travail sur l'exercice proposé par le jury envahir l'ensemble de cette épreuve. Dans cet esprit, des instructions ont été données aux commissions de sorte qu'elle répartissent convenablement le temps d'entretien entre, d'une part, les questions relatives à l'exercice du jury, résolution éventuellement comprise, et d'autre part l'étude des exercices présentés par le candidat. Des instructions cohérentes étaient données aux candidats : chaque vague est reçue séparément et reçoit une série de conseils pour préparer et passer l'épreuve dans les meilleures conditions. Parmi ces conseils figurait l'avertissement disant que le travail sur l'exercice proposé par le jury ne constituait qu'une partie de l'épreuve, et que par conséquent ils doivent penser à partager leur temps de préparation de manière adaptée à l'importance de chaque point à traiter. Cette consigne de travail s'est heurtée au fait qu'une partie des candidats arrivait devant les commissions en ayant trop peu travaillé sur leurs propres exercices. Aussi dans certains cas, l'interrogation sur les exercices proposés par les candidats se trouvait-elle quelque peu limitée. Nous avons renforcé cette demande d'équilibrage de l'épreuve en allégeant dans la mesure du possible le travail de rédaction demandé sur l'exercice proposé par le jury. L'importance des exercices proposés par les candidats se trouve ainsi très clairement réaffirmée.

3.3.3 Les dossiers de la 2^{de} épreuve orale

Ci-dessous sont présentés les dossiers dans l'ordre de leur parution. On n'a pas jugé utile de donner ici les annexes des dossiers, c'est-à-dire les extraits de programmes qui les accompagnent. Ces dossiers sont suivis par de courts rapports.

Dossier du 28 juin 2008

Thème : Équations différentielles

1. L'exercice proposé au candidat

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$:

$$(E)\ y' + \big(1 + \tan x\big)y = \cos x \qquad (E_0)\ y' + y = 1.$$

1) Donner l'ensemble des solutions de (E_0).
2) Soient g une fonction dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On pose $f(x) = g(x)\cos x$. Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g est solution de (E_0).
3) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Indiquer, pour chacune des questions de l'exercice, les savoirs mis en jeu.

Q.2) Présenter une solution de la question 2) de l'exercice telle que vous la donneriez à des élèves de Terminale.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

a) Sa réponse à la question **Q.2)**.
b) Un ou plusieurs exercices se rapportant au thème **« Équations différentielles »**.

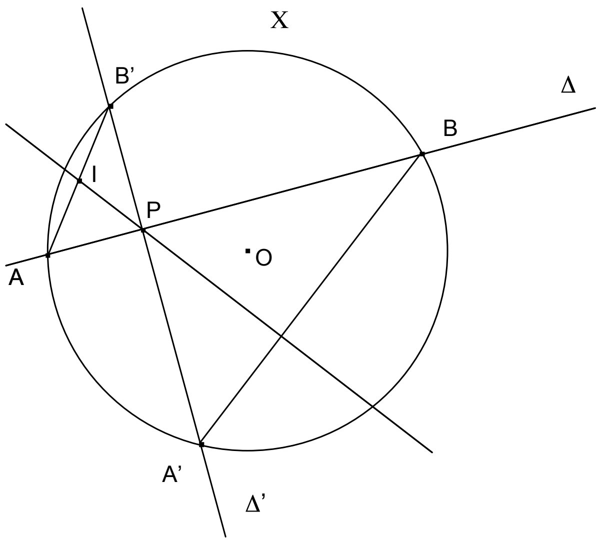
Dossier du 29 juin 2008

Thème : Outils - calcul vectoriel

1. L'exercice proposé au candidat

On considère un cercle X de centre O et de rayon r et un point P du plan. On pose $d = OP$.

1. Une droite Δ passant par P coupe le cercle X en A et B. On note E le point du cercle X diamétralement opposé à A.
   Démontrer que $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PE}$. En déduire que $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = d^2 - r^2$.
2. Application à l'étude d'une configuration :
   Dans la figure ci-dessous les droites Δ et Δ' sont orthogonales et le point I est le milieu du segment $[AB']$. Démontrer que les droites (PI) et $(A'B)$ sont orthogonales.



2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Indiquer, pour chacune des questions de l'exercice, les savoirs mis en jeu.

Q.2) Rédiger une solution de la question 2 de l'exercice telle que le candidat la présenterait à un élève de Première S.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- ◇ Sa réponse à la question **Q.2**.
- ◇ Un ou plusieurs exercices sur le thème « **Outils - Calcul vectoriel** ».

Dossier du 30 juin 2008

Thème : Suites
Étude du comportement de suites définies par une relation de récurrence du type : $u_{n+1} = f(u_n)$

1. L'exercice proposé au candidat

1) On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$.
   a) Résoudre l'équation $f(x) = x$.
   b) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a $f(x) \geqslant x$.
2) On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in [0,1]$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Énoncer les théorèmes et les outils mis en jeu dans l'exercice.

Q.2) Rédiger un énoncé détaillé de la question 2) pour des élèves de Terminale scientifique.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

◇ Sa réponse à la question **Q.2)**.

◇ Un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Suites : Étude du comportement de suites définies par une relation de récurrence du type :** $u_{n+1} = f(u_n)$ ».

Dossier du 1er juillet 2008

Thème : Arithmétique.

1. L'exercice proposé au candidat

On appelle diviseur propre d'un entier naturel non nul n, tout diviseur de n qui soit positif et distinct de n. Tout entier naturel non nul égal à la somme de ses diviseurs propres est dit nombre parfait. Exemple : 6 est un nombre parfait car il est égal à la somme de ses diviseurs propres soit 1, 2 et 3.

1) Établir la liste des diviseurs de 28 et 496 et montrer que ce sont deux nombres parfaits.
2) Vérifier que 28 et 496 sont de la forme $2^n(2^{n+1}-1)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ avec $2^{n+1}-1$ premier.
3) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $2^{n+1}-1$ est premier alors $2^n(2^{n+1}-1)$ est parfait.
4) Illustrer par un exemple le fait que si $2^{n+1}-1$ n'est pas premier alors $2^n(2^{n+1}-1)$ n'est pas parfait.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Quels sont les outils nécessaires à la résolution de l'exercice ?

Q.2) Rédiger la réponse à la question 3.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- ◇ Sa réponse à la question **Q.2)**.
- ◇ Un ou plusieurs exercices sur le thème « **Arithmétique** » mettant en jeu des propriétés de certains nombres entiers.

Dossier du 2 juillet 2008

Thème : Probabilités

1. L'exercice proposé au candidat

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en année, d'un téléviseur avant la première panne. On peut modéliser cette situation par une variable aléatoire qui suit une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Ainsi la probabilité d'un intervalle $[0, t[$, notée $p([0, t[)$, est la probabilité que le téléviseur tombe en panne avant t année. Cette loi est la loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif.

1) Déterminer, en fonction de λ, la valeur de t pour laquelle on a $p([0, t[) = p([t, +\infty[)$.
2) D'après l'étude statistique effectuée par le constructeur, la probabilité que le téléviseur tombe en panne avant la fin de la première année est 0,18. Calculer la valeur exacte de λ.
   Dans la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0{,}2$.
3) Montrer qu'une valeur approchée de la probabilité que le téléviseur n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années, arrondie à 10^{-4} près, est : 0,5488.
4) Sachant que ce téléviseur n'a connu aucune panne au cours des 10 premières années après sa mise en service, quelle est la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne au cours des 13 premières années ?
5) Dix téléviseurs neufs de ce type ont été mis en service en même temps. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de téléviseurs qui n'ont pas eu de panne au cours des trois premières années. Calculer une valeur approchée de la probabilité de l'événement « $X = 4$ » arrondie à 10^{-4} près.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Rédiger une réponse pour chacune des questions 3) et 4) de l'exercice.

Q.2) Commenter l'expression « loi de durée de vie sans vieillissement ».

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- ◇ Sa réponse à la question **Q.1)**.
- ◇ L'énoncé d'un ou plusieurs exercices se rapportant au thème : **« Probabilités »**.

Dossier du 3 juillet 2008

Thème : Problème de lieu

1. L'exercice proposé au candidat

On considère dans le plan deux droites Δ et Δ' sécantes en O et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ tels que $\widehat{(\vec{u}, \vec{u}')} = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$. On considère deux points A et B situés respectivement sur Δ et Δ', distincts de O et tels que $OA = OB$. À tout point M du plan on associe la somme notée $s(M)$, des distances du point M aux droites Δ et Δ'.

1) Montrer que $s(A) = s(B) = OA\frac{\sqrt{2}}{2}$.
2) Soit M un point du segment $[AB]$. En utilisant les aires des triangles OMA et OMB, montrer que la somme $s(M)$ est indépendante de la position de M sur le segment $[A, B]$.
3) Calculer la distance OA afin que, pour tout point M du segment $[AB]$, l'on ait $s(M) = 2$.
4) Le point A étant fixé pour satisfaire la condition de la question précédente, on note $\mathscr{L}$ le lieu des points M du plan tels que $s(M) = 2$. Montrer que $\mathscr{L}$ contient un rectangle dont $[AB]$ est un côté.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Dégager les méthodes et les savoir-faire utilisés dans cet exercice.

Q.2) Présenter une animation sur le module de géométrie dynamique de la calculatrice mettant en évidence le résultat établi dans la question 2) de l'exercice.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- ◇ Sa réponse à la question **Q.1)**.
- ◇ L'énoncé d'un ou plusieurs exercices se rapportant au thème : « **Problème de lieu** ».

Dossier du 4 juillet 2008

Thème : Analyse : Fonctions et équations

1. L'exercice proposé au candidat

Soit k un réel. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x e^{kt^2}\,\mathrm{d}t$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de F et l'on s'intéresse au nombre de points M_0 d'abscisse x_0 appartenant à $\mathcal{C}$ et en lesquels la tangente à $\mathcal{C}$ a un coefficient directeur égal à x_0.

1) Montrer qu'un tel point M_0 existe si et seulement si $x_0 > 0$ et vérifie l'équation

$$(E) : \qquad \ln x = kx^2.$$

2) a) En utilisant une calculatrice graphique et en faisant varier les valeurs de k, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) dans $]0, +\infty[$.

b) Si $k > 0$, trouver graphiquement une valeur approchée de k pour laquelle l'équation (E) a une unique solution dans $]0, +\infty[$.

3) Démontrer que pour $k < 0$, l'équation (E) a une unique solution dans $]0, +\infty[$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Présenter, à l'aide de la calculatrice, la ou les représentations permettant de faire les conjectures demandées à la question 2).

Q.2) Proposer une solution de la question 3) de l'exercice telle que le candidat la présenterait à des élèves de terminale.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- ◇ Sa réponse à la question **Q.2)**.
- ◇ L'énoncé d'un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Fonctions et équations** ».

Dossier du 5 juillet 2008

Thème : Problèmes d'incidence

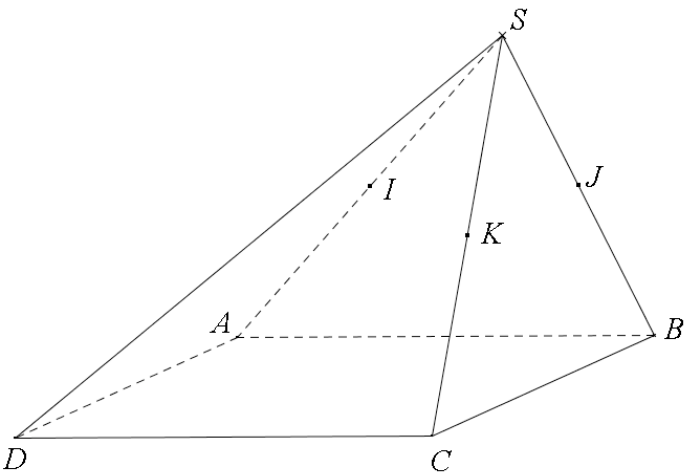
1. L'exercice proposé au candidat

Soit un parallélogramme $ABCD$ situé dans un plan $\mathscr{P}$ et soit S un point de l'espace n'appartenant pas à $\mathscr{P}$. On note respectivement I, J et K les milieux des segments $[SA]$, $[SB]$ et $[SC]$.

$Q.1$) a) Montrer que les plans $\mathscr{P}$ et (IJK) sont parallèles.
b) Montrer que le plan (IJK) coupe $[SD]$ en son milieu.

$Q.2$) Quelle est l'intersection des plans (CIJ) et $\mathscr{P}$?

$Q.3$) En déduire l'intersection des plans (CIJ) et (SAD).



2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Énoncer les théorèmes mis en jeu dans l'exercice.

Q.2) Présenter un corrigé de la question 1) pouvant être présenté à une classe de lycée.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

a) Sa réponse à la question Q.2).

b) Plusieurs énoncés d'exercices, dans la mesure du possible variés par le niveau concerné et la méthode de résolution utilisée, se rapportant au thème : **« Problèmes d'incidence »**.

Dossier du 10 juillet 2008

Thème : Divers types de raisonnements (par l'absurde, par récurrence...).

1. L'exercice proposé au candidat

Étant donné un entier naturel $n \geqslant 2$, on se propose détudier l'existence de trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1$ (modulo 2^n).

1) Cas où $n = 2$: Montrer que $1, 3$ et 5 sont solutions du problème.
2) On suppose dorénavant que n est un entier naturel supérieur ou égal à 3. Supposons qu'il existe trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1$ (modulo 2^n).
   a) Montrer que les entiers x, y et z sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs.
   b) On suppose que x et y sont pairs et que z est impair. Montrer qu'on a alors $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1$ (modulo 4) et en déduire une contradiction.
   c) On suppose que x, y et z sont impairs. Montrer qu'on a $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3$ (modulo 8) et conclure.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Énoncer les théorèmes et les outils mis en jeu dans l'exercice.

Q.2) Présenter une correction détaillée de la question 2)c) telle que le candidat la proposerait à des élèves de Terminale S.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

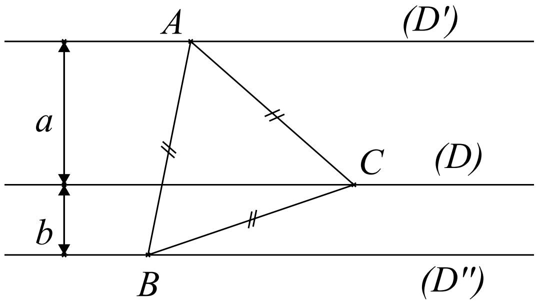
- ◇ Sa réponse à la question Q.2).
- ◇ Un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Divers types de raisonnements (par l'absurde, par récurrence...)** ».

Dossier du 11 juillet 2008

Thème : Problèmes de calcul de grandeurs
Calculs de longueurs, d'aires et de volumes

1. L'exercice proposé au candidat

Dans la figure ci-dessous le triangle ABC est équilatéral et les droites (D), (D') et (D'') sont des droites parallèles passant respectivement par les sommets C, A et B. On note a la distance de (D) à (D') et b celle de (D) à (D'') ; on se propose de calculer, en fonction de a et b, l'aire du triangle ABC.



1 Le cercle circonscrit à ABC recoupe la droite (D) en un point P. Montrer que $AP = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$ et que $BP = \dfrac{2b}{\sqrt{3}}$.

2 En déduire que $AB^2 = \dfrac{4(a^2 + b^2 + ab)}{3}$.

3 Calculer l'aire du triangle ABC en fonction de a et b.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

Q.2) Proposer la rédaction d'une solution à la question 1).

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

◇ Sa réponse à la question **Q.2)**.

◇ Un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Problèmes de calcul de grandeurs : calculs de longueurs, d'aires et de volumes** ».

Dossier du 12 juillet 2008

Thème : Intégration. Calcul d'intégrales par des méthodes variées

1. L'exercice proposé au candidat

On considère la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que F est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

   On considère la fonction u définie sur $[0,+\infty[$ par $u(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

2) a) Calculer la dérivée de la fonction $F\circ u$.
   b) En déduire que, pour tout réel $x\in[0,+\infty[$, on a $F\circ u\,(x)=x$.
   c) Calculer $F(2)$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Préciser les théorèmes utilisés dans cet exercice.

Q.2) Proposer une solution de la question 2) telle que le candidat la présenterait à une classe.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- ⋄ Sa réponse à la question **Q.2)**.
- ⋄ L'énoncé d'un ou plusieurs exercices sur le thème « **Calcul d'intégrales par des méthodes variées** ».

Dossier du 13 juillet 2008

Thème : Géométrie
Interprétation géométrique des nombres complexes

1. L'exercice proposé au candidat

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note (Γ) le cercle de centre O et de rayon 1.

1) Soit A un point de (Γ) d'affixe a. On note (T_a) la tangente en A à (Γ).
Soit M un point du plan d'affixe z.
   a) Montrer que M appartient à (T_a) si et seulement si $\dfrac{z-a}{a}$ est imaginaire pur.
   b) Déduire que M appartient à (T_a) si et seulement si z vérifie l'égalité : $z\,\overline{a} + \overline{z}\,a = 2$.

2) Soient A d'affixe a et B d'affixe b deux points distincts de (Γ) tels que $a+b \neq 0$.
Montrer que les droites (T_a) et (T_b), tangentes à (Γ) respectivement en A et B, sont sécantes et que leur point d'intersection a pour affixe $\dfrac{2ab}{a+b}$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

Q.2) Proposer une solution de la question 1) telle que le candidat la présenterait à une classe.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

1) La réponse à la question **Q.2)**.
2) L'énoncé d'un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Interprétation géométrique des nombres complexes** ».

Dossier du 14 juillet 2008

Thème : Probabilités

1. L'exercice proposé au candidat

Cet exercice est un QCM. Pour chaque affirmation une seule des réponses A, B ou C est exacte et il s'agit de la trouver.

1) Dans une classe de 31 élèves, 12 élèves jouent au tennis, 8 élèves jouent au football et 5 élèves jouent à la fois au tennis et au football.
On interroge au hasard un élève de cette classe. La probabilité que cet élève ne joue ni au tennis ni au football est :

$\boxed{A}$ $\frac{6}{31}$ $\boxed{B}$ $\frac{16}{31}$ $\boxed{C}$ $\frac{11}{31}$

2) Une urne contient trois boules blanches et deux boules noires. On tire successivement et au hasard deux boules en respectant le protocole suivant : si la première boule tirée est noire alors on la remet dans l'urne avant de tirer la seconde boule. Si la première boule est blanche alors on ne la remet pas dans l'urne avant de tirer la seconde boule.
La probabilité d'obtenir exactement une boule blanche à l'issue des deux tirages est :

$\boxed{A}$ $\frac{3}{5}$ $\boxed{B}$ $\frac{27}{50}$ $\boxed{C}$ $\frac{12}{22}$

3) On dispose d'une urne U_1 contenant quatre jetons numérotées 1, 1, 2, 3 et d'une urne U_2 contenant trois jetons numérotées 2, 3, 3. On tire au hasard un jeton dans chaque urne et on appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux jetons, associe la valeur absolue de la différence des numéros portés par les deux jetons. L'espérance mathématique de X est :

$\boxed{A}$ 1 $\boxed{B}$ $\frac{13}{12}$ $\boxed{C}$ $\frac{5}{6}$

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Indiquer pour chacun des items de ce QCM les savoirs mis en jeu pour trouver la réponse exacte.

Q.2) Justifier la réponse à la question 2).

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

◇ Sa réponse à la question **Q.2)**.

◇ L'énoncé d'un ou plusieurs exercices se rapportant au thème : « **Probabilités** ».

Dossier du 15 juillet 2008

Thème : Problèmes sur les configurations

1. L'exercice proposé au candidat

Sur la figure jointe :

- les points A, O_1, O_2 et O_3 sont alignés ;
- les cercles (Γ_1), (Γ_2) et (Γ_3) ont pour centres respectifs O_1, O_2, O_3 et pour rayons respectifs 10, 20 et 59 millimètres ;
- le cercle (Γ_2) est tangent aux cercles (Γ_1) et (Γ_3) ;
- le point A appartient à (Γ_1) ;

1) Construire, sur la figure jointe, à la règle et au compas, une droite (Δ) passant par A et tangente à (Γ_3) (*on laissera visibles les traits de construction*).
2) On appelle H le projeté orthogonal de O_2 sur (Δ). Calculer la distance OH et justifier que (Δ) coupe (Γ_2) en deux points, que l'on notera B et C.
3) Calculer la distance BC.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

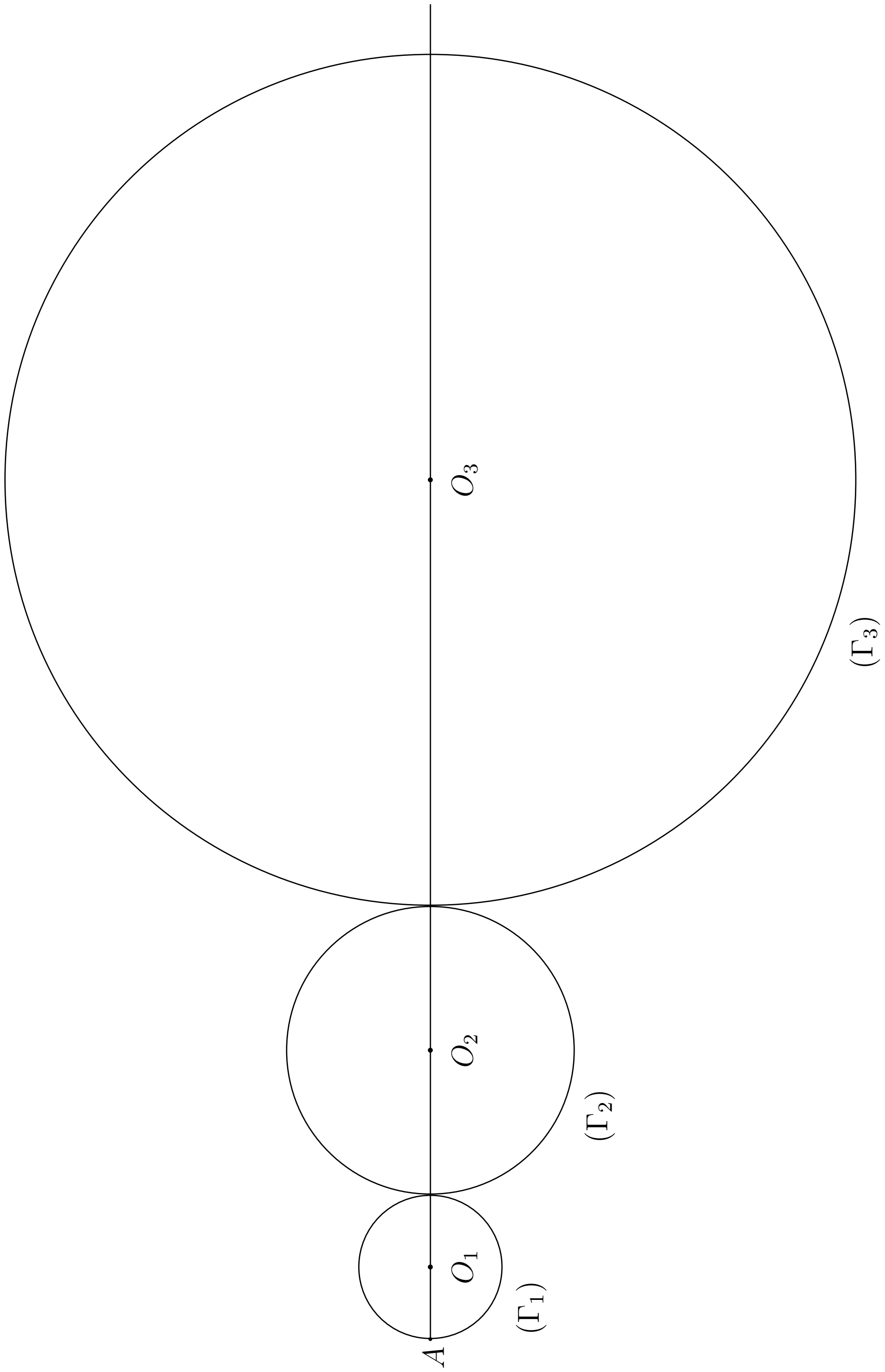
Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Préciser les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

Q.2) Proposer une solution de la question 2) telle que le candidat la présenterait à une classe.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

1) La réponse à la question **Q.2)**.
2) La figure obtenue à la question 1) de l'exercice (à joindre au dossier).
3) L'énoncé d'un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Problèmes sur les configurations** ».



A
O_1
O_2
O_3
(Γ_1)
(Γ_2)
(Γ_3)

Dossier du 16 juillet 2008

Thème : Intégration

1. L'exercice proposé au candidat

L'exercice a pour objet d'étudier la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par :

$$I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n \, \mathrm{d}x.$$

1) Calculer I_1 et montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$I_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n.$$

2) a) À l'aide d'une calculatrice, donner une conjecture sur le sens de variation et la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   b) Démontrer les propriétés conjecturées à la question 2) a).

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Indiquer, pour chaque question de l'exercice, les savoirs mis en jeu.

Q.2) Présenter une solution de la question 2).

Sur ses fiches le candidat rédigera et présentera :

a) Sa réponse à la question **Q.2)**.

b) Un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Intégration** ».

Dossier du 17 juillet 2008

Thème : Géométrie
Problèmes de recherche de lieux géométriques

1. L'exercice proposé au candidat

Soient A, B et C trois points non alignés. On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{L}$ des points M du plan tels que les triangles MAB et MAC aient la même aire.

On note (Δ_0) la parallèle à (BC) passant par A et (Δ_1) la médiane issue de A dans ABC.

1) Montrer que l'ensemble $(\Delta_0) \cup (\Delta_1)$ est inclus dans $\mathcal{L}$.

   Pour tout point M distinct de A, on note d_B et d_C les distances respectives de B et C à la droite (AM).

2) Soit M un point n'appartenant pas à (Δ_0). On appelle J l'intersection de la droite (AM) et de la droite (BC).
   a) Montrer que si $M \in \mathcal{L}$ alors $d_B = d_C$.
   b) En déduire que J est le milieu de $[BC]$.
3) Conclure sur l'ensemble $\mathcal{L}$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

Q.2) Proposer une solution de la question 2) telle que vous la présenteriez à une classe.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

a) Sa réponse à la question **Q.2)**
b) Un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Problèmes de recherche de lieux géométriques** ».

Dossier du 18 juillet 2008

Thème : Interprétation géométrique des nombres complexes

1. L'exercice proposé au candidat

1) Les nombres complexes a_1, a_2, a_3 et a_4 sont donnés.
Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 &= a_1 \\ z_2 + z_3 &= a_2 \\ z_3 + z_4 &= a_3 \\ z_4 + z_1 &= a_4 \end{cases}$$

d'inconnue $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4$.

2) Dans le plan, on considère un quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$.
Montrer qu'il existe un quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$ dont les milieux des côtés sont les points A_1, A_2, A_3 et A_4 si et seulement si le quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$ est un parallélogramme.
Montrer que, dans ce cas, le point de concours des diagonales du parallélogramme $A_1A_2A_3A_4$ est l'isobarycentre des points M_1, M_2, M_3 et M_4.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Dégager les diverses étapes de la résolution de la première question de l'exercice.

Q.2) Indiquer les connaissances et savoir-faire mis en jeu dans cet exercice.

Sur ses fiches le candidat rédigera et présentera :

- ◇ Sa réponse à la question **Q.1)**.
- ◇ L'énoncé d'un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Interprétation géométrique des nombres complexes** ».

28 Juin 2008, Dossier 1 : Équations différentielles

Le sujet a été abordé sans trop d'inquiétudes par les candidats. L'exercice du jury a été en général bien traité. Les candidats se sont limités aux équations différentielles du premier ordre. Très peu d'exercices avec des équations différentielles du second ordre ont été proposés. Les candidats ont eu un peu de mal à justifier la terminologie « équation différentielle linéaire ». Huit candidats sur dix énoncent le théorème donnant l'ensemble des solutions de $y' = ay + b$ mais ne connaissent pas la méthode qui consiste à additionner une solution particulière et une solution de l'équation homogène, dont la démonstration fait jouer les mêmes ressorts que la question Q2 de l'exercice du jury. On peut regretter le manque de réflexion sur les problèmes de modélisation rencontrés dans le cadre des exercices en contexte.

29 Juin 2008, Dossier 2 : Outils, calcul vectoriel

Certains candidats ont traduit le titre du thème en « produit scalaire » et n'ont donc proposé que des exercices sur le produit scalaire. Les choix d'exercices par les candidats ont été inégaux, le terme « outil » ayant été mal analysé. Certains exercices ont consisté en du calcul vectoriel pour lui-même. On note un certain manque de recul par rapport aux exercices proposés, souvent trop simples mais pas forcément maîtrisés ou bien inappropriés par rapport à l'utilisation de l'outil. Certains candidats n'ont pas su résoudre la question 2) du jury. Ils utilisent la relation de Chasles dans tous les sens avant d'arriver au résultat. Les solutions proposées sont faites à l'aide de calculs inutilement compliqués. Une très grande majorité de candidats (environ 80%) présente des difficultés à définir le produit scalaire. Peu de candidats ont pensé à faire la figure en utilisant un logiciel de construction.

30 Juin 2008, Dossier 3 : Suites

Les candidats ont de graves problèmes de logique avec l'équation $x = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$. Les équivalences intervenant dans cette question ne sont absolument pas maîtrisées. Par ailleurs, le théorème donnant l'image d'une suite convergente par une fonction continue est peu souvent énoncé et on obtient un énoncé du type théorème du point fixe avec des hypothèses plus ou moins correctes. Les candidats, ici et à d'autres occasions, parlent de limite avant de parler de convergence. Les candidats savent proposer une étude graphique de la suite. En revanche, ils n'ont pas de recul sur les exercices étudiant des suites arithmético-géométriques ou des suites homographiques. Les candidats ont du mal à mettre en évidence l'utilité des suites récurrentes. Quelques candidats ont trouvé des exemples adaptés et pertinents (approximation, dynamique des populations, programmation d'un test d'arrêt). Une majorité de candidats utilise la calculatrice. Les exercices proposés par les candidats font trop souvent appel à des suites artithmétiques, géométriques ou arithmético-géométriques. Dans ce dernier cas une suite auxiliaire est fournie par l'énoncé et le lien avec le point fixe de $f : x \mapsto ax + b$ n'est pas toujours perçu. Beaucoup de candidats proposent des énoncés issus des manuels mais ne savent pas comment sont fabriqués les suites permettant de ramener le problème à l'étude de suites géométriques.

1er juillet 2008, Dossier 4 : Arithmétique

Le dossier traite des nombres parfaits et établit une forme remarquable de ces nombre dans le cas pair (réciproque non traitée). Contrairement à ce que nous aurions pu penser, ce dossier a présenté quelques difficultés aux candidats. L'intitulé sur le thème « arithmétique mettant en jeu les propriétés de certains nombres premiers » a gêné les candidats. Bien qu'étant un sujet facile ce thème montre une confusion fréquente dans l'utilisation des outils arithmétiques de ce niveau (en particulier l'utilisation de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers). On constate que tous les candidats ne sont pas capables de décrire les diviseurs d'un entier connaissant sa décomposition en facteurs premiers.

Dans l'ensemble les candidats savent traiter l'exercice proposé par le jury, mais peu prennent suffisamment de recul pour savoir avec précision les notions mises en jeu (par exemple ils ne perçoivent souvent pas que lorsque $2^{n+1}-1$ est premier alors $2^n(2^{n+1}-1)$ est une décomposition en facteurs premiers). Les exercices proposés sont variés mais parfois mal écrits. Là encore, la perception qu'ont les candidats des théorèmes d'arithmétique est rarement très fine.

2 juillet 2008, Dossier 5 : Probabilités

Le sujet couvre une bonne partie du programme sur les lois continues, ce qui a permis un questionnement riche. Les commissions regrettent cependant que seule la notation $p([0,t[)$ ait été donnée (même si elle est conforme au programme des Terminales) alors qu'elle ne fait pas intervenir la variable aléatoire (ce choix a gêné les candidats lors de l'interrogation).

Le sujet a été généralement compris malgré quelques points de confusion. Bien que compris, le sujet n'a pas été très bien traité à cause d'un manque de familiarité avec la terminologie des probabilités. La justification de durée de vie sans vieillissement n'était pas toujours très claire.

Le choix des exercices proposés par les candidats est assez pauvre et les candidats ont du mal à prendre du recul par rapport aux exercices qu'ils trouvent dans les manuels.

3 juillet 2008, Dossier 6 : Géométrie

Les candidats ont globalement réussi à traiter l'exercice du jury (mais curieusement, la question 4 a déstabilisé la plupart des candidats). En revanche, ils ont eu beaucoup de mal à utiliser la calculatrice pour répondre à Q2. Quatre candidats sur cinq n'ont pas su faire l'animation sur calculatrice. Certains font une animation correcte mais font afficher la somme des aires des deux triangles au lieu de la somme des distances de M aux deux droites. D'autres font apparaître les distances mais pas la somme. Aucun candidat n'a proposé d'étudier l'effet de $\pi/4$.

Les commissions ont estimé que ce dossier était à la fois abordable et consistant donc discriminant car la détermination complète du lieu et le comportement de la solution par rapport aux paramètres n'étaient pas triviaux. Sous des dehors faciles, le sujet fait bien apparaître les aptitudes des candidats à la géométrie, les exercices proposés étant de difficulté inégale mais dans le thème.

4 juillet 2008, Dossier 7 : Fonctions, équations

La question Q1 a été traitée très approximativement. La question Q2 a été dans l'ensemble correctement traitée. La dérivabilité de F est laborieusement justifiée et l'expression de $F'(x)$ n'est pas toujours correcte (confusion entre t et x). Peu de candidats ont évoqué la possibilité d'étudier d'emblée le nombre de solutions de l'équation $\frac{\ln x}{x^2} = k$. Très peu de candidats ont eu l'idée de s'intéresser à la valeur exacte de k demandée dans la conjecture.

Les exercices proposés ont été de 2 types : ou bien résolution d'équations algébriques (second degré, racine évidente) ou bien étude de fonctions (avec théorème des valeurs intermédiaires).

La calculatrice : 20% des candidats ne l'ont pas utilisée, 40% ont tracé les courbes correspondant à quelques valeurs de k sans pouvoir émettre de conjecture, 40% ont présenté une résolution complète (animation et conjecture). L'exploration brutale à la calculatrice (on trace les courbes de $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto kx^2$ et l'on regarde) ne permet pas l'étude en continu que permettent des logiciels comme Géoplan.

5 juillet 2008, Dossier 8 : Problèmes d'incidence

L'exercice du jury est du niveau de Seconde, il était difficile pour les candidats de présenter des exercices variés faisant appel à des méthodes des niveaux supérieurs type calcul vectoriel, nombres complexes, transformations. Les exercices proposés ne font pas appel aux méthodes analytiques. Le sujet permet cependant de mettre en relief le fait que beaucoup de candidats énoncent des théorèmes faux en géométrie dans l'espace, et ont du mal à mobiliser leur connaissance en géométrie vectorielle.

Les théorèmes d'incidence et l'expression « problèmes d'incidence » sont fort méconnus de beaucoup de candidats. L'exercice est généralement résolu par les candidats mais parfois avec maladresse. Les exercices proposés sont pour la plupart des exercices de géométrie dans l'espace.

10 juillet 2008, Dossier 9 : Divers types de raisonnement

Les candidats citent systématiquement les définitions et les propriétés relatives aux congruences mais aucun ne les utilise de manière efficace. Les calculs — effectués à partir de l'écriture d'un entier impair sous la forme $2k + 1$ — sont menés mais les candidats peinent à conclure. Ils identifient en général les types de raisonnement utilisés dans l'exercice. On peut regretter qu'ils fassent trop de calculs, plutôt que de s'appuyer sur des petites propriétés arithmétiques. L'exercice est jugé intéressant et sélectif. Les exercices proposés ne sont pas très originaux. Ils ont surtout porté sur la récurrence et l'absurde et manquent de variété (peu de géométrie).

11 juillet 2008, Dossier 10 : Géométrie, calcul de grandeurs

L'exercice du jury a été relativement bien compris. Les candidats ont en général su le résoudre. Certains candidats semblent avoir été génes par les références aux programmes (résolution vectorielle/analytique) et ont perdu du temps dans leur préparation à tenter d'utiliser ces outils pour la question 1). La question 2) a été négligée. Des difficultés avec la formule d'Al Kashi et le théorème de l'angle inscrit. Quatre candidats sur dix présentent des animations intéressantes avec le logiciel de géométrie dynamique.

Le sujet fait remonter à la surface l'éternelle difficulté qu'ont les candidats avec les angles orientés. Les candidats ont du mal à énoncer correctement le théorème de l'angle inscrit, qu'il confondent souvent avec le théorème de l'angle au centre.

Les exercices proposés sont pauvres. Quelques candidats proposent un calcul de volume. Beaucoup d'exercices sur la formule d'Al Kashi. Les candidats ont tenté de varier le niveau de leurs exercices (collège, lycée).

12 juillet 2008, Dossier 11 : Calcul d'intégrales par différentes méthodes

L'exercice est relativement bien traité par les candidats à part parfois le 2 c) car les candidats ont voulu appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et n'obtenaient alors qu'une valeur approchée de $F(2)$. Les candidats s'efforcent de bien chercher les théorèmes utilisés. Seul un candidat sur quatre a su résoudre l'équation $u(x) = 2$ en se ramenant à une équation du second degré.

Les exercices proposés portent sur l'intégration par parties, l'utilisation de diverses méthodes d'identification, le calcul approché par la méthode des rectangles, une formule du type u'/u, un calcul d'aire, etc.

13 juillet 2008, Dossier 12 : Nombres complexes et géométrie

Tous les candidats, avec plus ou moins de rigueur, ont répondu à la question Q2. On note des défauts récurrents de logique et toujours les mêmes problèmes avec les notions d'angle, mesure d'angle, argument, orientation du plan. La résolution de la question 2 de l'exercice est beaucoup plus sélective. Peu de candidats vont au-delà du système linéaire en z et $\overline{z}$. La plupart des exercices proposés utilisent la forme algébrique. Quelques candidats ont fait des propositions intéressantes (théorème de Napoléon, caractérisation des triangles rectangles, homographies).

14 juillet 2008, Dossier 13 : Probabilités

Le dossier a rempli son rôle. Il a permis de balayer l'ensemble des notions de probabilité du programme et d'évaluer les capacités des candidats. L'exercice du jury permettait d'évaluer la rigueur des candidats, leurs connaissances et leur recul sur les probabilités élémentaires, les probabilités conditionnelles, les variables aléatoires. Le sujet s'est révélé assez sélectif.

Les candidats ont pour la plupart trouvé les bonnes réponses aux QCM. En revanche, ils n'ont pas toujours été capables de mobiliser les propriétés et définitions relatives aux probabilités, se contentant de lectures à partir d'un arbre.

Les exercices proposés étaient variés : utilisation de dénombrements, loi exponentielle, graphes, variable aléatoire...

15 juillet 2008, Dossier 14 : Géométrie : configurations

Le sujet au niveau collège a été bien compris par la grande majorité des candidats. Ce dossier est probablement perçu comme facile par la plupart des candidats. Peu de candidats ont noté la « quasi-tangence » de Δ à Γ_2 et donc l'intérêt d'un calcul précis et le réglage faussement fantaisiste des paramètres 10, 20 et 59. Le sujet a été jugé assez riche pour évaluer les différentes connaissances des candidats sur Thalès, constructions à la règle et au compas, Pythagore. Les candidats ne pensent que très rarement (même avec de l'aide) à utiliser des notions d'analyse dans un contexte géométrique (ici par exemple le théorème des valeurs intermédiaires pour justifier l'existence de 2 points d'intersection en Q2). Quelques candidats peinent sur la propriété du triangle ABM inscrit dans le cercle de diamètre AB. D'autres ont utilisé la calculatrice et des valeurs approchées de O_2H et BC alors que le calcul algébrique est aisé et instructif. Dans 50% des cas le jury a remarqué des utilisations pertinentes de la calculatrice. Les exercices proposés étaient en général pauvres et pas toujours en cohérence avec le sujet. Pour faciliter le travail devant les commissions, il aurait été plus judicieux que le jury fournisse la figure sur transparent.

16 juillet 2008, Dossier 15 : Suite d'intégrales

Le sujet est relativement bien traité par la majorité des candidats. L'utilisation de la calculatrice est réussie. La démonstration des propriétés conjecturées a été laborieuse pour environ un candidat sur quatre. Les exercices proposés par les candidats sont relativement diversifiés.

17 juillet 2008, Dossier 16 : Recherche de lieux géométriques

La question 3 de l'exercice du jury est très révélatrice des difficultés de raisonnement des candidats. La détermination de l'ensemble $\mathcal{L}$ est très souvent laborieuse ; la synthèse n'est pas faite correctement et montre des faiblesses de logique et/ou de théorie des ensembles. Les candidats ne savent pas qu'une médiane partage un triangle en deux triangles de même aire.

Les exercices proposés utilisent des transformations du plan affine euclidien mais les propriétés de ces dernières sont peu maîtrisées.

18 juillet 2008, Dossier 17 : Interprétation géométrique des nombres complexes

Même si le sujet est classique, il donne de nombreuses ouvertures, ce qui permet de tester les candidats. La résolution du système a été fragile ainsi que la question 2). Les candidats présentent de grosses difficultés dans l'utilisation des équivalences. Certains candidats passent en parties réelle et imaginaire pour le 1). Les candidats ont eu des difficultés à mettre en relation l'aspect géométrique et l'aspect algébrique de l'exercice.

On constate comme souvent un manque de variété dans le choix des exercices. Les transformations en relation avec les complexes sont difficilement ou rarement abordées. Les exercices proposés ne mettent pas toujours en évidence l'utilité de passer par les nombres complexes.

4 CONCLUSION

Le travail d'un jury de concours tel que celui-ci a des répercussions importantes et durables si l'on considère qu'il s'agit de recruter les futurs enseignants de collège et de lycée. À côté d'autres voies d'accès adaptées aux personnels déjà en situation d'enseignant, mais d'importance numérique moindre, le concours externe « donne le ton » pour les jeunes étudiants en ce qui concerne les exigences attendues en matière de recrutement.

La situation actuelle permet tout à la fois de maintenir un niveau d'exigence raisonnable et de pourvoir tous les postes. En ce sens elle est tout à fait satisfaisante.

L'introduction des TICE dans un concours de cette taille se heurte à de nombreux obstacles, qui n'ont pas permis la mise en œuvre d'une épreuve sur ordinateur. Pour y suppléer en partie, l'utilisation pendant les épreuves orales de calculatrices performantes a été fortement encouragée ces dernières années. La rénovation des matériels est devenue effective et à peu près continue depuis l'introduction de prêts gracieux par les constructeurs. L'introduction de tablettes de rétroprojection a suivi. Le nombre des sujets de première épreuve pour lesquels l'utilisation d'une calculatrice est encouragé ou imposé s'est accru, et en réponse, le taux d'utilisation par les candidats augmente de manière significative. Concernant l'épreuve sur dossier, le fait que l'utilisation des calculatrices y est rendue explicite pour une partie d'entre eux, jointe au fait que le candidat se voit proposer un dossier unique, a considérablement renforcé la place des TICE.

Je tiens à remercier tous les membres du jury pour leur disponibilité et pour la motivation dont ils ont fait preuve afin de réussir une session satisfaisante à tous points de vue.

Je tiens également à remercier aussi tous nos partenaires, les éditeurs qui ont donné des manuels, les constructeurs de calculatrices qui ont prêté du matériel, les universités qui ont prêté des livres, Mme la Proviseure du Lycée Marie Curie et toute son équipe, qui nous ont accueillis, et le SIEC qui nous prête des rétroprojecteurs et qui suit de près l'organisation matérielle du concours, pour leur efficacité et leur soutien.

Les prochaines sessions

À l'heure où ce rapport est rédigé, des textes concernant les nouveaux concours de recrutement de professeurs sont parus. Ces textes ne concernent pas la session 2009 qui continuera donc à se dérouler selon les mêmes modalités que celles de la session 2008.

À partir de la session 2010 les nouveaux textes pourraient entrer en application et le concours prendrait donc une autre forme, plus particulièrement en ce qui concerne les épreuves d'admission.

5 ANNEXES

5.1 Bibliothèque du CAPES

5.1.1 Programmes (documents disponibles dans les salles de préparation, utilisables pour les deux épreuves orales)

B.O. hors série n° 2 du 30-08-2001 : Programme de seconde générale et technologique.
B.O. hors série n° 8 du 31-08-2000 : Programme de Première ES.
B.O. hors série n° 7 du 31-08-2000 : Programme de mathématiques-informatique, Première L.
B.O. hors série n° 3 du 31-08-2001 : Programme pour l'option facultative, Première L.
B.O. hors série n° 7 du 31-08-2000 : Programme de Première S.
B.O. spécial 2 du 02-05-1991 : Programme de Première SMS, STI (sauf spécialités « Arts appliqués » et « Génie optique ») et STL.
B.O. hors série n° 8 du 02-10-1997 : Programme de Première STI spécialités « Arts appliqués » et « Génie optique ».
B.O. hors série du 24-09-1992 : Programme de Première STT (tome III, brochure 1).
B.O. hors série n° 4 du 30-08-2001 : Programme de Terminale ES.
B.O. hors série n° 3 du 30-08-2001 : Programme pour l'option facultative de Terminale L.
B.O. hors série n° 4 du 30-08-2001 : Programme de Terminale SMS, STI, STL et STT.
B.O. spécial n° 8 du 07-07-1994 : Programme de Terminale STI (sauf spécialités « Arts appliqués » et « Génie optique »).
B.O. hors série n° 8 du 02-10-1997 : Programme de Terminale STI spécialités « Art appliqués » et « Génie optique ».
B.O.E.N. spécial n° 8 du 07-07-1994 : Programme de Terminale SMS.

5.1.2 Ouvrages disponibles seulement pour l'épreuve sur dossier

Ouvrages généraux

n°	NIVEAU	TITRE	AUTEURS	ANNÉE	ÉDITEUR
1	COL	ENSEIGNER LA GÉOMÉTRIE	COUSIN-FAUCONNET	1995	ARMAND COLIN
2	COL	LE CALCUL LITTÉRAL		1999	IREM
3	COL	PETIT X N° 44		1996	IREM
4	COL	PETIT X N° 4		1984	IREM
5	COL	GESTION DE DONNÉES ET STAT		1997	IREM
6	COL	PETIT X N° 40		1995	IREM
7	COL	DES CHIFFRES ET DES LETTRES		1991	IREM
8	COL	AUTOUR DE THALÈS		1995	IREM
9	LYC	ENSEIGNER LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE N° 99		1995	APMEP
10	LYC	L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES	ROBERT, LATTUATI, PENNINCKX	1999	ELLIPSES
11	LYC	GÉOMÉTRIE	GAUTIER, COLOMB...	1999	ELLIPSES
12	LYC	MATHS ET SCIENCES ÉCO ET SOCIALES		1996	IREM

13	LYC	POUR UNE PRISE EN COMPTE DES CALCULATRICES SYMBOLIQUES EN ANALYSE		1998	IREM
14	LYC	FAIRE DES MATHS AVEC DES CALCULATRICES SYMBOLIQUES	TROUCHE	1998	IREM
15	LYC	LA GÉOMÉTRIE PLANE		1989	IREM
16	LYC	MATHS ET FILIÈRE ÉCO ET SOCIALE		1996	IREM
17	LYC	AIMER FAIRE DES MATHS 3		1996	IREM
18	LYC	AIMER FAIRE DES MATHS 4		1997	IREM
19	LYC	AIMER FAIRE DES MATHS 5		1998	IREM
20	GÉN	THÉORIE ET APPLICATIONS DE LA STATISTIQUE	MURRAY R. SPIEGEL	1972	MC GRAW-HILL
21	GÉN	LE NOMBRE PI	ADCS	1992	ACDS
22	GÉN	HISTOIRE D'ALGORITHMES : DU CAILLOU À LA PUCE	CHABERT, BARBIN...	1993	BELIN
23	GÉN	ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES		1989	CRDP
24	GÉN	COURS DE CALCUL DES PROBABILITÉS	CALOT	1967	DUNOD
25	GÉN	STATISTIQUE DESCRIPTIVE - TD	MONINO, KSIANSKI, LE CORNU	2000	DUNOD
26	GÉN	EXERCICES DE CALCUL DES PROBABILITÉS	CALOT	1986	DUNOD
27	GÉN	LES OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES : RÉFLEXES ET STRATÉGIES	BELHAJ SOULAMI	1999	ELLIPSES
28	GÉN	GÉOMÉTRIE	CARRAL	1995	ELLIPSES
29	GÉN	TOPOLOGIE GENERALE ET ANALYSE FONCTIONNELLE	SCHWARTZ	1970	HERMANN
30	GÉN	MÉTHODES MATHS POUR LES SCIENCES PHYSIQUES	SCHWARTZ	1965	HERMANN
31	GÉN	GROUPES ET GÉOMÉTRIES	SENECHAL	1979	HERMANN
32	GÉN	MÉTHODES MODERNES EN GÉOMÉTRIE	FRESNEL	1996	HERMANN
33	GÉN	APPROXIMATION ET OPTIMISATION	LAURENT	1972	HERMANN
34	GÉN	LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE	SORTAIS	1994	HERMANN
35	GÉN	ABRÉGÉ D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES	DIEUDONNÉ	1986	HERMANN
36	GÉN	CALCUL INFINITESIMAL	DIEUDONNÉ	1980	HERMANN
37	GÉN	GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE ET DU PLAN	SORTAIS	1988	HERMANN
38	GÉN	AUX ORIGINES DU CALCUL INFINITESIMAL	CERCLE D'HISTOIRE DES SCIENCES	1999	IREM
39	GÉN	POURQUOI PAS DES MATHÉMATIQUES		2000	IREM
40	GÉN	ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES 1		1999	IREM
41	GÉN	PROBLEME DE MISE EN ÉQUATIONS		1996	IREM
42	GÉN	DES STATISTIQUES À LA PENSÉE STATISTIQUE		2001	IREM
43	GÉN	ANGLES ROTATIONS		1993	IREM
44	GÉN	APPORTS DE L'OUTIL INFO... À LA GÉOMÉTRIE		1994	IREM
45	GÉN	LE VRAI ET LE FAUX	GANDIT	2001	IREM

46	GÉN	ALGORITHMIQUE & TRADUCTION POUR CALCULATRICES	DE GRAEVE	2001	IREM
47	GÉN	RALLYE : PRÊT À AFFRONTER L'ÉPREUVE DE MATH		1998	IREM
48	GÉN	HISTOIRE DES MATHS POUR NOS CLASSES		1991	IREM
49	GÉN	INITIATION À LA CRYPTOLOGIE	COHEN, OLIVIER	2000	IREM
50	GÉN	LA JUBILATION EN MATHS	DELEDICQ	2001	IREM
51	GÉN	POURQUOI AIMER ENCORE FAIRE DES MATHS		1994	IREM
52	GÉN	FRAGMENTS D'ARITHMÉTIQUE		1999	IREM
53	GÉN	UNE HISTOIRE DE CONIQUES		1996	IREM
54	GÉN	ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES 2		1999	IREM
55	GÉN	SIMILITUDES		1999	IREM
56	GÉN	INITIATION À L'ARITHMÉTIQUE		1999	IREM
57	GÉN	MATHS : APPROCHE PAR DES TEXTES HISTORIQUES TOME 2		1990	IREM
58	GÉN	INFO-MATHIC : ACTIVITES MATHS DANS UN ENVIRONNEMENT INFORMATIQUE		1998	IREM
59	GÉN	MATHS : APPROCHE PAR DES TEXTES HISTORIQUES		1986	IREM
60	GÉN	MATHS : APPROCHE PAR DES TEXTES HISTORIQUES TOME 3		2001	IREM
61	GÉN	AIMER ENCORE FAIRE DES MATHS 2		1995	IREM
62	GÉN	EXERCICES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE	TRUFFAULT	1996	IREM
63	GÉN	AIRES		2000	IREM
64	GÉN	LES CONIQUES		1997	IREM
65	GÉN	COURS DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE	TRUFFAULT, VOGEL	1995	IREM
66	GÉN	ENSEIGNER L'ARITHMÉTIQUE		2000	IREM
67	GÉN	LA RÉCURSIVITÉ EN GÉOMÉTRIE : LES FRACTALS	CUPPENS	1986	IREM
68	GÉN	MATHÉMATIQUES AU FIL DES ÂGES	GROUPE ÉPISTEMOLOGIE ET HISTOIRE	1987	IREM
69	GÉN	MÉTHODES DE MATHS ET PROGRAMMATION	NIZARD	1988	LAVOISIER TEC & DOC
70	GÉN	ÉLÉMENTS D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES	BOURBAKI	1984	MASSON
71	GÉN	MÉTHODES NUMÉRIQUES	BAKHVALOV	1976	MIR MOSCOU
72	GÉN	RECUEIL D'EXERCICES ET DE PROBLÈMES D'ANALYSE	DEMIDOVITCH	1965	MIR MOSCOU
73	GÉN	ÉPISTÉMOLOGIE DES MATHÉMATIQUES	CLERO	1990	NATHAN
74	GÉN	PROBABILITÉS ET INFÉRENCE STATISTIQUE	ABBOUD, AUDROING	1989	NATHAN

75	GÉN	DICTIONNAIRE DES MATHÉMATIQUES	BOUVIER, GEORGE, LE LIONNAIS	1996	PUF
76	GÉN	SUITES ET SÉRIES	COMBES	1982	PUF
77	GÉN	ALGÈBRE LINÉAIRE ET APPLICATIONS TOME 1	MASCART, STOKA	1984	PUF
78	GÉN	ALGÈBRE LINÉAIRE ET APPLICATIONS TOME 2	MASCART, STOKA	1985	PUF
79	GÉN	LE CALENDRIER	COUDERC	1986	QUE SAIS-JE ?
80	GÉN	LES NOMBRES ET LEURS MYSTÈRES	WARUSFEL	1961	SEUIL
81	GÉN	STATISTIQUE ET CALCUL DES PROBABILITÉS	MASIERI	1988	SIREY
82	GÉN	LE CERCLE D'EULER	COLLET, GRISO	1987	VUIBERT
83	GÉN	DICTIONNAIRE DES MATHÉMATIQUES	BOUVIER, GEORGE, LE LIONNAIS	1996	PUF
84	GÉN	ENSEIGNER LES STATS DU CM À LA SECONDE. POURQUOI ? COMMENT ?		1998	IREM

Ouvrages d'enseignement supérieur

n°	NIVEAU	TITRE	AUTEURS	ANNÉE	ÉDITEUR
1	1er CYCLE	LES MATHÉMATIQUES DE A À Z	LARROCHE, LAURENT	2002	DUNOD
2	1er CYCLE	LES SÉRIES	DELMER	1995	DUNOD
3	2e ANNÉE	BEST OF MATHÉMATIQUES : LES MEILLEURS SUJETS DE CONCOURS	BOUTILLON	2000	DUNOD
4	2e CYCLE	CALCUL DIFFÉRENTIEL ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	AZE, CONSTANS, HIRIART-URRUTY	2002	DUNOD
5	2e CYCLE	THÉORIE DES GROUPES	DELCOURT	2001	DUNOD
6	2e CYCLE	INTRODUCTION À LA LOGIQUE	DAVID, NOUR, RAFFALLI	2001	DUNOD
7	2e CYCLE, AGRÉG, ÉI	ANALYSE NUMÉRIQUE	HERON, PICARD, ISSARDROCH	1999	DUNOD
8	2e CYCLE, AGRÉG, ÉI	PROCESSUS STOCHASTIQUES : PROCESSUS DE POISSON, CHAÎNES DE MARKOV ET MARTINGALES	FOATA, FUCHS	2002	DUNOD
9	2e CYCLE, ÉI	CALCUL DIFFÉRENTIEL POUR LA LICENCE	DONATO	2000	DUNOD
10	2e CYCLE, ÉI	CALCUL SCIENTIFIQUE	SAINSAULIEU	2000	DUNOD
11	2e CYCLE, ÉI	ANALYSE NUMÉRIQUE ET ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES	NICAISE	2000	DUNOD
12	2e CYCLE	STATISTIQUE INFERENTIELLE	FOURDRINIER	2002	DUNOD
13	2e CYCLE	ÉLÉMENTS D'INTÉGRATION ET D'ANALYSE FONCTIONNELLE	EL KACIMI ALAOUI	1999	ELLIPSES
14	2e CYCLE, AGRÉG, ÉI	ANALYSE ET GÉOMÉTRIE : MÉTHODES HILBERTIENNES	ROOS	2002	DUNOD

15	AGRÉG	COURS D'ANALYSE : ANALYSE REELLE ET INTÉGRATION	DOUKHAN, SIFRE	2001	DUNOD
16	AGRÉG	COURS D'ALGÈBRE	TAUVEL	1999	DUNOD
17	AGRÉG	TOPOLOGIE ET ANALYSE FONCTIONNELLE	GONNORD, TOSEL	1996	ELLIPSES
18	AGRÉG	LEÇONS D'ALGÈBRE (PRÉPARATION À L'ORAL)	MADERE	1998	ELLIPSES
19	AGRÉG	CALCUL DIFFÉRENTIEL (THÈMES D'ANALYSE)	GONNORD, TOSEL	1998	ELLIPSES
20	AGRÉG	COURS D'ALGÈBRE	PERRIN	1996	ELLIPSES
21	AGRÉG	MODÉLISATION À L'ORAL DE L'AGRÉG : CALCUL SCIENTIFIQUE	DUMAS	1999	ELLIPSES
22	AGRÉG	THÈMES D'ANALYSE	EXBRAYAT, ALESSANDRI	1997	MASSON
23	AGRÉG	ALGÈBRE POUR L'AGRÉGATION INTERNE	TAUVEL	1996	MASSON
24	AGRÉG	ÉLÉMENTS D'ANALYSE	ZUILY, QUEFFELEC	1995	MASSON
25	ANNÉES 1&2	MATHEMATICA	COOMBES ET AL.	2000	DUNOD
26	ANNÉES 1&2	SYSTÈME D – ANALYSE	SOROSINA	1999	DUNOD
27	CAPES	ÉPREUVE ORALE D'EXPOSÉ : 33 LEÇONS POUR SE PRÉPARER EFFICACEMENT	BAJOU, SAINT-LANNES, SORBE	2003	DUNOD
28	CAPES	GÉOMÉTRIE AFFINE ET EUCLIDIENNE	DELODE	2000	DUNOD
29	CAPES	ANALYSE ET PROBAS : ÉCRITS 1996–97 (avec rappels de cours)	CHRISTOL, DECOMPS-GUILLOUX, PIQUET	1999	DUNOD
30	CAPES	ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE : ÉCRITS 1996–99 (avec rappels de cours)	BORIES-LONGUET, JARRAUD	1999	DUNOD
31	CAPES	NOS 20 SUJETS PRÉFÉRÉS	BORIS-LONGUET, DECOMPS-GUILLOUX, JARRAUD, MELEARD, PIQUET	2000	DUNOD
32	CAPES	L'ÉPREUVE SUR DOSSIER À L'ORAL : GÉOMÉTRIE	ROBERT	1995	ELLIPSES
33	CAPES	L'ÉPREUVE SUR DOSSIER À L'ORAL : ANALYSE	LAMBRE	1998	ELLIPSES
34	CAPES	ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE : ÉCRITS 1991–96 (avec rappels de cours)	BORIES-LONGUET, JARRAUD, LEVY-BRUHL	1997	MASSON
35	CAPES	ANALYSE ET PROBAS : ÉCRITS 199196 (avec rappels de cours)	MELEARD, PIQUET, DECOMPS-GUILLOUX	1997	MASSON
36	CAPES	ANALYSE (avec rappels de cours)	LEVYBRUHL, PIQUET, SERVIEN, VAUTHIER	1987	MASSON

37	CAPES	ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE	LEVYBRUHL, PIQUET, SERVIEN, VAUTHIER	1987	MASSON
38	CAPES	34 PROBLÈMES CORRIGÉS POSES À L'ÉCRIT DU CAPES	CHEVALLET	1999	VUIBERT SUP
39	CAPES & AGRÉG	STRUCTURES ALGÉBRIQUES EN GÉOMÉTRIE	AIME	1999	ELLIPSES
40	CAPES & AGRÉG	GÉOMÉTRIE : COURS ET EXERCICES CORRIGÉS	BIGARD	1998	MASSON
41	CAPES & AGRÉG	ALGÈBRE LINÉAIRE (COURS ET EXERCICES)	ROUDIER	2003	VUIBERT
42	CAPES & AGRÉG INTERNE	COMPLEMENTS D'ALGÈBRE ET DE GÉOMÉTRIE	DE BIASI	2000	ELLIPSES
43	CAPES & AGRÉG INTERNE	MATHÉMATIQUES POUR LE CAPES ET L'AGRÉG INTERNE	DE BIASI	1998	ELLIPSES
44	CAPES & AGRÉG INTERNE	MATHÉMATIQUES POUR LE CAPES ET L'AGRÉG INTERNE	DE BIASI	1995	ELLIPSES
45	CNAM	INITIATION À L'ANALYSE NUMÉRIQUE	THEODOR	1989	MASSON
46	CYCLES 1&2, ÉI	TOUTES LES MATHÉMATIQUES	STÖCKER	2002	DUNOD
47	DEUG	MATHÉMATIQUES	DELMER	1996	DUNOD
48	DEUG	FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES ET INTÉGRATION	DELMER	1997	DUNOD
49	DEUG 1	EXERCICES D'ANALYSE : CALCUL INTÉGRAL	BOSCHET	1997	MASSON
50	DEUG A1	ENSEIGNER AUTREMENT LES MATHÉMATIQUES		1990	IREM
51	DEUG MIAS MASS	ALGÈBRE GENERALE, TD	DENMAT, HEAULME	2000	DUNOD
52	DEUG MIAS MASS	BEST OF ANALYSE 1re ANNÉE	PARZYSZ	2001	DUNOD
53	DEUG MIAS MASS SM	ALGÈBRE 1re ANNÉE	LIRET, MARTINAIS	1997	DUNOD
54	DEUG MIAS MASS SM	ANALYSE 1re ANNÉE	LIRET, MARTINAIS	1997	DUNOD
55	DEUG MIAS MASS SM	ANALYSE 2e ANNÉE	LIRET, MARTINAIS	1998	DUNOD
56	DEUG MIAS MASS SM	ANALYSE 2e ANNÉE	PROCHASSON	2000	DUNOD
57	DEUG MIAS MASS SM	ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE 2e ANNÉE	PROCHASSON	2001	DUNOD
58	DEUG SVT	ANALYSE	BLONDEL	2000	DUNOD
59	DEUG 1	EXERCICES D'ANALYSE : 176 EXERCICES ET 105 TESTS CORRIGÉS (avec rappels de cours)	SCHMITT	1997	MASSON
60	DEUG 1	FONCTIONS D'UNE VARIABLE	CALVO	1997	MASSON
61	DEUG 1 SM	COURS DE MATHÉMATIQUES	DIXMIER	1976	GAUTHIER-VILLARS

62	DEUG 2 SM	COURS DE MATHÉMATIQUES	DIXMIER	1977	GAUTHIER-VILLARS
63	LICENCE	ALGÈBRE 3e ANNÉE	SCHWARTZ	2003	DUNOD
64	LICENCE	TOPOLOGIE ET ANALYSE	SKANDALIS	2001	DUNOD
65	LICENCE 1 MIAS MASS SM	ALGÈBRE 1re ANNÉE	LIRET, MARTINAIS	2003	DUNOD
66	LICENCE 1 MIAS MASS SM	ANALYSE 1re ANNÉE	LIRET, MARTINAIS	2003	DUNOD
67	LICENCE 3, MASTER1, ÉI	INTRODUCTION À L'ANALYSE NUMÉRIQUE : APPLICATIONS SOUS MATLAB	BASTIEN, MARTIN	2003	DUNOD
68	LICENCE 1 MIAS MASS SM	LES MATHÉMATIQUES EN LICENCE TOME 1	AZOULAY, AVIGNANT, AULIAC	2003	EDISCIENCE
69	MAÎTRISE	INTRODUCTION À L'ANALYSE NUMÉRIQUE MATRICIELLE ET À L'OPTIMISATION	CIARLET	1988	MASSON
70	MAÎTRISE	INTRODUCTON À L'ANALYSE NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES	RAVIART, THOMAS	1988	MASSON
71	MASTER, ÉI	SIMULATION NUMÉRIQUE EN C++	DANAILA, HECHT, PIRONNEAU	2003	DUNOD
72	MASTER 1&2, AGRÉG	INTRODUCTION À LA THÉORIE SPECTRALE	LEVY-BRUHL	2003	DUNOD
73	MP	L'ORAL (ENTRAÎNEMENT AUX CONCOURS)	MONIER	2002	DUNOD
74	PRÉPA 1	ANALYSE 1 – COURS TOME 1	MONIER	1997	DUNOD
75	PRÉPA 1	ANALYSE 2 – COURS TOME 2	MONIER	1996	DUNOD
76	PRÉPA 1	ALGÈBRE 1	MONIER	2000	DUNOD
77	PRÉPA 1&2	GÉOMÉTRIE	MONIER	2000	DUNOD
78	PRÉPA 2	ALGÈBRE 2 – COURS TOME 6	MONIER	1998	DUNOD
79	PRÉPA 2	ANALYSE – TOME 3	MONIER	1997	DUNOD
80	PRÉPA 2	ANALYSE 4 – TOME 4	MONIER	1997	DUNOD
81	PRÉPA 1	ALGÈBRE 1 – COURS TOME 5	MONIER	1996	DUNOD
82	PRÉPA 1&2	GÉOMÉTRIE – TOME7	MONIER	1997	DUNOD
83	PRÉPA 2	MATHÉMATIQUES 2e ANNÉE	DESCHAMPS, WARUSFEL...	2001	DUNOD
84	PRÉPA 2	ANALYSE 3 – COURS TOME 3	MONIER	1997	DUNOD
85	STS-IUT	SÉRIES DE FOURIER, TRANSFORMATION DE LAPLACE	BENICHOU, BOY, POUGET	1995	ELLIPSES
86		ANALYSE	BLONDEL	2000	DUNOD
87		LE NOMBRE D'OR ET LES NOMBRES DE FIBONACCI	MEYER STEYAERT	1981	IREM
88		PROBAS ET STATS		1996	IREM
89		L'ENSEIGNEMENT DES STATS ET PROBAS		1999	IREM
90		RMS		1998/1999	VUIBERT

Manuels scolaires

nº	**NIV**	**SÉRIE**	**TITRE**	**REM**	**AUTEURS**	**AN**	**ÉDITEUR**
1	6e		DÉCIMALE			1996	BELIN
2	6e		MATH ET CLIC			2000	BORDAS
3	6e		NUL EN MATHS ?			1997	BORDAS
4	6e		MATHS			1996	BORDAS
5	6e		MATH ET CLIC	PROF		2000	BORDAS

6	6e		DIMATHÈME			2000	DIDIER
7	6e		100 PROBLÈMES SANS PEINE			1998	HACHETTE
8	6e		CINQ SUR CINQ			1994	HACHETTE
9	6e		ALPHA			1994	HATIER
10	6e		TRIANGLE			1996 2000	HATIER
11	6e		DOCUMENTS D'ACCOMPAGNEMENT			1996	M.E.N.
12	6e		TRANSMATH			1996	NATHAN
13	5e		DÉCIMALE			1997	BELIN
14	5e		MATHS JAUNE			1997	BORDAS
15	5e		MATHÉMATIQUES		SERRA	2001	BORDAS
16	5e		MATHÉMATIQUES	PROF	CORRIEU BATIER		DELAGRAVE
17	5e		DIMATHÈME			1997	DIDIER
18	5e		DIMATHÈME			2001	DIDIER
19	5e		CINQ SUR CINQ			1997 2000	HACHETTE
20	5e		NOUVEAU PYTHAGORE	PROF		1997	HATIER
21	5e		TRIANGLE	PROF		1997	HATIER
22	5e		TRANSMATH			1997	NATHAN
23	5e		TRANSMATH	PROF		2001	NATHAN
24	4e		DÉCIMALE			1998	BELIN
25	4e		MATHÉMATIQUES			1998	BORDAS
26	4e		MÉDIAMATH			2002	BORDAS
27	4e		MÉTHODES EN PRATIQUE			1988	CRDP
28	4e		DIMATHÈME			1998	DIDIER
29	4e		DIMATHÈME			2002	DIDIER
30	4e		TOUT SIMPLEMENT			1998	HACHETTE
31	4e		CINQ SUR CINQ			2002	HACHETTE
32	4e		CINQ SUR CINQ			1998	HACHETTE
33	4e		DIABOLO			2003	HACHETTE
34	4e		TRIANGLE			1998	HATIER
35	4e		NOUVEAU PYTHAGORE			1998	HATIER
36	4e		TOUT LE PROGRAMME EN 300 EXERCICES			1997	HATIER
37	4e		SUIVI SCIENTIFIQUE		IREM	1988	INTER IREM
38	4e		NOUVEAU TRANSMATH	PROF		1998	NATHAN
39	4e		TRANSMATH	PROF		2002	NATHAN
40	4e		TRANSMATH			1988	NATHAN
41	3e		COMPRENDRE ET RÉUSSIR			1997	BELIN
42	3e		MÉTHODES EN PRATIQUE			1989	CRDP
43	3e		DIMATHÈME			1999	DIDIER
44	3e		CINQ SUR CINQ	PROF		2003	HACHETTE
45	3e		CINQ SUR CINQ			1999	HACHETTE
46	3e		TOUT SIMPLEMENT			1999	HACHETTE
47	3e		NOUVEAU PYTHAGORE	PROF		1999	HATIER
48	3e		TRIANGLE			1999	HATIER
49	3e		TRIANGLE	PROF		2003	HATIER
50	3e		SUIVI SCIENTIFIQUE		IREM	1989	INTER IREM
51	3e		MATHÉMATIQUES			1999	BORDAS
52	3e		DIABOLO			2004	HACHETTE
53	2de		MATHÉMATIQUES			1998	BELIN
54	2de		INDICE			2000	BORDAS
55	2de		MATHÉMATIQUES	PROF		2000	BREAL
56	2de		MATHÉMATIQUES			2000	BREAL
57	2de		MODULOMATH			2004	DIDIER
58	2de		DIMATHÈME			2000	DIDIER

59	2de		REPÈRES			2004	HACHETTE
60	2de		PYRAMIDE			2000	HACHETTE
61	2de		DÉCLIC			1998	HACHETTE
62	2de		SIGMATH			1998	HATIER
63	2de		ÉNONCÉS ET SCÉNARIOS			1993	INTER IREM
64	2de		LIAISON COLLÈGE SECONDE			1990	INTER IREM
65	2de		HYPERBOLE			2000	NATHAN
66	2de		TRANSMATH			2000	NATHAN
67	2de		PHYSIQUE	PHYSIQUE	DURRAN-DEAU	2000	HACHETTE
68	1re	ES	FRACTALE	OBLIG		1998	BORDAS
69	1re	ES	FRACTALE	OPT		1998	BORDAS
70	1re	ES	MATHÉMATIQUES			2001	BREAL
71	1re	ES	DIMATHÈME	OBLIG		2001	DIDIER
72	1re	ES	DIMATHÈME	OPT		2001	DIDIER
73	1re	ES	DÉCLIC			2001	HACHETTE
74	1re	ES	TRANSMATH			1998	NATHAN
75	1re	ES	TRANSMATH			2001	NATHAN
76	1re	ES	HYPERBOLE			2001	NATHAN
77	1re	L	INDICE			2001	BORDAS
78	1re	L	MATH INFO			2001	DELAGRAVE
79	1re	L	MANUEL DE MATHÉMATIQUES			2002	ELLIPSES
80	1re	L	FICHES TD TP			2002	ELLIPSES
81	1re	L	MATH INFO			2003	HACHETTE
82	1re	L	DÉCLIC			1999	HACHETTE
83	1re	L	DÉCLIC			2001	HACHETTE
84	1re	L	MATH INFO			2001	HATIER
85	1re	L	TRANSMATH			2001	NATHAN
86	1re	S	MATHÉMATIQUES			2001	BELIN
87	1re	S	INDICE			2001	BORDAS
88	1re	S	FRACTALE			2001	BORDAS
89	1re	S	MATHÉMATIQUES			2001	BREAL
90	1re	S	DIMATHÈME	GÉOMÉ-TRIE		2001	DIDIER
91	1re	S	DIMATHÈME	ANALYSE		2001	DIDIER
92	1re	S	GÉOMÉTRIE		TERRACHER	2001	HACHETTE
93	1re	S	DÉCLIC			2001	HACHETTE
94	1re	S	ANALYSE		TERRACHER	2001	HACHETTE
95	1re	S	TRANSMATH			2001	NATHAN
96	1re	S	HYPERBOLE			2001	NATHAN
97	1re	SMS	DIMATHÈME			1998	DIDIER
98	1re	STI	DIMATHÈME			1998	DIDIER
99	1re	STT	INDICE			2003	BORDAS
100	1re	STT	SIGMATH			2001	FOUCHER
101	1re	STT	MATHÉMATIQUES			2002	HACHETTE
102	T^{le}	ÉS	FRACTALE	SP		1998	BORDAS
103	T^{le}	ÉS	FRACTALE	OBL		1998	BORDAS
104	T^{le}	ÉS	MATHÉMATIQUES			2002	BREAL
105	T^{le}	ÉS	MATHÉMATIQUES			1998	BREAL
106	T^{le}	ÉS	DIMATHÈME	SP		1998	DIDIER
107	T^{le}	ÉS	DIMATHÈME	OBL		1998	DIDIER
108	T^{le}	ÉS	DÉCLIC			1998	HACHETTE
109	T^{le}	ÉS	DÉCLIC			2002	HACHETTE
110	T^{le}	ÉS	LE GUIDE ABC BAC			2002	NATHAN
111	T^{le}	ÉS	TRANSMATH			2002	NATHAN
112	T^{le}	ÉS	HYPERBOLE			2002	NATHAN
113	T^{le}	L	DÉCLIC			1999	HACHETTE
114	T^{le}	S	MATHÉMATIQUES			1998	BELIN

115	T^{le}	S	FRACTALE	OBL		1998	BORDAS
116	T^{le}	S	FRACTALE	SP		1998	BORDAS
117	T^{le}	S	FRACTALE	SP		2002	BORDAS
118	T^{le}	S	FRACTALE	OBL		2002	BORDAS
119	T^{le}	S	INDICE	SP		2002	BORDAS
120	T^{le}	S	INDICE	OBL		2002	BORDAS
121	T^{le}	S	MATHÉMATIQUES	SP		2002	BREAL
122	T^{le}	S	MATHÉMATIQUES	OBL		2002	BREAL
123	T^{le}	S	MATHÉMATIQUES	SP		1998	BREAL
124	T^{le}	S	MATHÉMATIQUES	OBL		1998	BREAL
125	T^{le}	S	DIMATHÈME	SP		1998	DIDIER
126	T^{le}	S	DIMATHÈME	OBL		1998	DIDIER
127	T^{le}	S	BAC AVEC MENTION			1998	ELLIPSES
128	T^{le}	S	EXERCICES			1999	ELLIPSES
129	T^{le}	S	FOR MATH			1999	ELLIPSES
130	T^{le}	S	MATHÉMATIQUES	SP	TERRACHER	1998	HACHETTE
131	T^{le}	S	MATHÉMATIQUES	OBL	TERRACHER	1998	HACHETTE
132	T^{le}	S	DÉCLIC	SP		1998	HACHETTE
133	T^{le}	S	DÉCLIC	OBL		1998	HACHETTE
134	T^{le}	S	CORRIGÉS		TERRACHER	1998	HACHETTE
135	T^{le}	S	CORRIGÉS		TERRACHER	1996	HACHETTE
136	T^{le}	S	MATHÉMATIQUES		TERRACHER	2002	HACHETTE
137	T^{le}	S	DÉCLIC			2002	HACHETTE
138	T^{le}	S	TRANSMATH	OBL		2002	NATHAN
139	T^{le}	S	TRANSMATH	SP		1998	NATHAN
140	T^{le}	S	TRANSMATH	OBL		1998	NATHAN
141	T^{le}	S	HYPERBOLE	OBL		2002	NATHAN
142	T^{le}	S	HYPERBOLE	SP		2002	NATHAN
143	T^{le}	STI	DIMATHÈME			1997	DIDIER
144	T^{le}	STI	MATHÉMATIQUES			1998	HACHETTE
145	T^{le}	STI	MATHÉMATIQUES			1998	NATHAN
146	T^{le}	STT	COMPTABILITÉ GESTION			1999	DIDIER
147	T^{le}	STT	DIMATHÈME			1999	DIDIER
148	T^{le}	STT	COMPTABILITÉ GESTION			1997	FOUCHER
149	T^{le}	STT	MATHS ACA ET ACC			1997	FOUCHER
150	T^{le}	STT	MATHS ACA ET ACC			2002	HACHETTE
151	T^{le}	STT	MATHS ACA ET ACC			1998	HACHETTE
152	T^{le}	STT	COMPTABILITÉ GESTION			1998	HACHETTE
153	T^{le}	STT	COMPTABILITÉ GESTION			2002	HACHETTE
154	T^{le}	STT	COMPTABILITÉ GESTION			1998	NATHAN
155	T^{le}	STT	MATHS ACA ET ACC			1998	NATHAN
156	T^{le}		ENSEIGNER LES PROBAS			1994	IREM
157	BÉP	IN-DUS-TRIEL	MATHÉMATIQUES 2		BARUSSAUD, FAVRE ARTIGUES, THEVENON	1994	FOUCHER
158	BÉP	IN-DUS-TRIEL	MATHÉMATIQUES	INDUS-TRIEL, SANI-TAIRE ET SOCIAL	ASTIER, VRIGNAUD	2002	NATHAN
159	BÉP	TER-TIAIRE	LES CAHIERS DE MATHÉMATIQUES		BARUSSAUD, NOËL	2001	FOUCHER
160	BÉP	TER-TIAIRE	MATHÉMATIQUES	TER-TIAIRE, HÔTEL-LERIE, RESTAU-RATION	ASTIER, VRIGNAUD	2002	NATHAN

161	BTS	INDUSTRIEL	ANALYSE, ALGÈBRE LINÉAIRE, NOMBRES COMPLEXES	BÂTIMENT & LABO	VERLANT	1997	FOUCHER
162	BTS	INDUSTRIEL					FOUCHER
163	BTS	TERTIAIRE	ANALYSE ET ALGÈBRE LINÉAIRE TOME 1	INFORMATIQUE ET GESTION	VERLANT	1997	FOUCHER
164	BTS	TERTIAIRE					HACHETTE
165	BTS		PROBAS ET STATS, STATS INFÉRENTIELLES			1996	IREM
166	BTS IUT		PROBAS ET STATS		GACÔGNE, FRUGIER	1990	EYROLLES

Annales

n°	NIVEAU	SÉRIE	TITRE	REM	ANNÉE	ÉDITEUR
1	BAC	ÉS	ANNALES	CORRIGÉS	1998	HATIER
2	BAC	ÉS	ANNALES	SUJETS	1998	HATIER
3	BAC	ÉS	ANNALES	SUJETS	1995	VUIBERT
4	BAC	ÉS L	ANNALES	SUJETS	1997	NATHAN
5	BAC	ÉS L	ANNALES	CORRIGÉS	1997	NATHAN
6	BAC	ÉS L	ANNALES	CORRIGÉS	1998	VUIBERT
7	BAC	ÉS L	ANNALES	SUJETS	1998	VUIBERT
8	BAC	L	ANNALES	CORRIGÉS	1998	HATIER
9	BAC	L	ANNALES	SUJETS	1998	HATIER
10	BAC	L	ANNALES	SUJETS	2000	HATIER
11	BAC	L	ANNALES	SUJETS	2001	HATIER
12	BAC	L	ANNALES	SUJETS	1996	VUIBERT
13	BAC	S	ANNALES	CORRIGÉS	1998	HATIER
14	BAC	S	ANNALES	CORRIGÉS	1998	HATIER
15	BAC	S	ANNALES	SUJETS	1998	HATIER
16	BAC	S	ANNALES	SUJETS	1997	NATHAN
17	BAC	S	ANNALES	CORRIGÉS	1998	NATHAN
18	BAC	S	ANNALES	CORRIGÉS	1998	VUIBERT
19	BAC	S	ANNALES	SUJETS	1998	VUIBERT
20	BAC	S	ANNALES	SUJETS	1996	VUIBERT
21	BAC	S	ANNALES	SUJETS	1995	VUIBERT
22	BAC	STT STI	ANNALES	SUJETS	1995	NATHAN
23	BAC	STT STI	ANNALES	CORRIGÉS	1996	NATHAN
24	BAC	STT STI	ANNALES	CORRIGÉS	1998	NATHAN
25	BAC	STT STI	ANNALES	SUJETS	1998	NATHAN
26	BREVET		ANNALES	CORRIGÉS	1998	HATIER
27	BREVET		ANNALES	CORRIGÉS	1997	NATHAN
28	BREVET		ANNALES	SUJETS	1997	NATHAN
29	BREVET		ANNALES	SUJETS	1998	NATHAN
30	BREVET		ANNALES	CORRIGÉS	1994	VUIBERT
31	BREVET		ANNALES	SUJETS	1994	VUIBERT
32	BREVET		ANNALES	SUJETS	1995	VUIBERT
33	BREVET		ANNALES	SUJETS	1996	VUIBERT
34	BREVET		ANNALES	SUJETS	1998	VUIBERT

Le jury remercie tous les éditeurs qui ont contribué à l'actualisation de la bibliothèque en facilitant l'acquisition de leurs ouvrages récents.

5.2 Calculatrices

Depuis la session 1994, les calculatrices personnelles sont interdites pour les deux épreuves orales (cf. B.O. n° 13 du 15-04-93). Pour les sujets qui en nécessiteraient l'usage, les candidats pourront en emprunter une à la bibliothèque du CAPES.

Pour la session 2008 deux constructeurs ont permis par des prêts gracieux de proposer une quantité suffisante de modèles récents de calculatrices rétroprojetables.

Les modèles présents étaient :
Casio Classpad 300
Texas Instruments Voyage 200.

Le jury, dans le souci d'aider candidats et formateurs à se préparer de manière efficace aux épreuves, a mis en ligne sur son site des documents sur ces calculatrices que tout visiteur du site peut librement utiliser. Ces documents, assortis d'une introduction, montrent dans quel esprit le jury souhaite voir utiliser ces machines. Des exemplaires imprimés de ces textes étaient mis à la disposition des candidats pendant leur préparation, de sorte qu'il leur était inutile de s'en munir.

ATTENTION

Pour la session 2009, les modèles de calculatrice disponibles lors des épreuves orales seront :
Casio Classpad 300
Hewlett-Packard 49g (à ne pas confondre avec le modèle 49g+)
Texas Instruments Voyage 200
Texas Instruments Nspire CAS (à ne pas confondre avec le modèle Nspire).

FIN DU RAPPORT