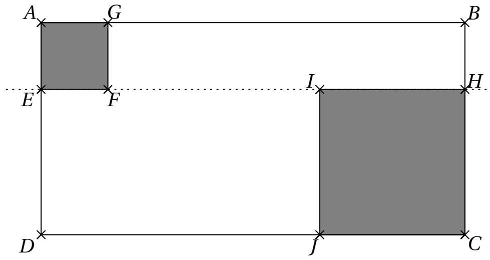
Thème : problèmes conduisant à l'étude d'un polynôme du second degré

L'exercice

Sur une parcelle rectangulaire $ABCD$ de 4 mètres par 8 mètres, on veut délimiter deux parterres de fleurs carrés, dans deux coins opposés (AEFG et CHIJ, sur le schéma ci-contre) et avec E, F, I et H alignés.



Comment faut-il construire ces deux carrés pour que l'aire de la zone restante soit maximale ?

Les réponses de deux élèves

Élève de seconde

On note x la longueur AE. L'aire restante est égale à $f(x) = 32 - x^2 - (4-x)^2$.
À l'aide de la calculatrice, j'observe que $f(1) = f(3) = 22$. La fonction f atteint donc son maximum quand $x = 2$.

Élève de première

On note x la longueur AE. L'aire restante est égale à $f(x) = -2x^2 + 8x + 16$.
$f'(x) = -4x + 8$
On étudie le signe de $f'(x)$ et on en déduit les variations de f.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	24	$\nearrow$	

La fonction f n'admet donc pas un maximum mais un minimum. Il n'y a pas de valeur maximale de l'aire, mais elle est minimale quand $x = 2$.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence ses réussites et ses erreurs éventuelles.

2 – Présentez la correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe dont vous préciserez le niveau. Vous mettrez en évidence ce que peut apporter l'utilisation d'outils logiciels.

3 – Proposez deux ou trois *problèmes conduisant à l'étude d'un polynôme du second degré*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

Thème : probabilités

L'exercice

Le centre d'approvisionnement d'une chaîne de magasins spécialisée dans le jardinage et l'animalerie vient de recevoir une importante livraison de sable noir et blanc pour la décoration des fonds d'aquarium, de la part d'un nouveau fournisseur.
Ce sable d'une granulométrie importante est déjà conditionné en sacs d'environ 3 litres.
À l'issue d'une série de tests, deux types de défauts sont apparus, notés respectivement **c** et **j**.
Le défaut **c** consiste en la présence d'agrégats calcaires.
Le défaut **j** consiste en la présence de « grains » de sable jaune.

On dit qu'un sac est défectueux s'il présente au moins un des deux défauts **c** ou **j**.

On prélève un sac au hasard dans cette livraison.
On note C, l'événement « le sac présente le défaut **c** » et J l'événement « le sac présente le défaut **j** ».
On suppose que ces deux événements sont indépendants.
Les tests préalables ont permis d'établir que 2 % des sacs présentent le défaut **c** et que 3 % des sacs présentent le défaut **j**.

1 – Donner la valeur des probabilités de chacun des deux événements C et J.

2 – On note E l'événement « le sac présente les deux défauts **c** et **j** ». Calculer $P(E)$.

3 – Sachant que le sac choisi au hasard est défectueux, calculer la probabilité qu'il présente les deux défauts.

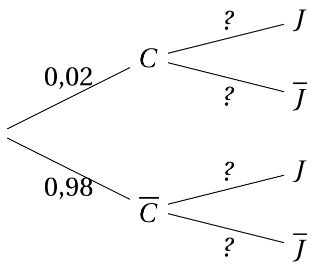
Les réponses de deux élèves aux deux premières questions

Élève 1

1. $P(C) = 0{,}02$ *et* $P(J) = 0{,}03$
2. $P(E) = P(C \cap J) = 0{,}02 \times 0{,}03 = 0{,}0006$

Élève 2

1. $P(C) = 0{,}02$ *et* $P(J) = 0{,}03$
2. On dresse un arbre pondéré.
Il me manque des valeurs.
Je ne sais pas comment calculer $P(E) = P(C \cap J)$.



Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs.

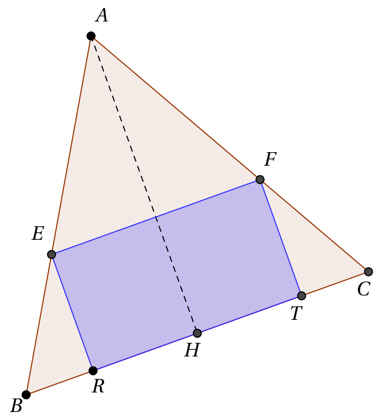
2 – Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale S.

3 – Proposez trois exercices sur le thème *probabilités*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

Thème : problèmes d'optimisation

L'exercice

On considère un rectangle inscrit dans un triangle équilatéral de côté 18 cm comme représenté sur la figure ci-contre. On souhaite que ce rectangle ait la plus grande aire possible.
On désigne par H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
Où faut-il placer le point R pour que l'aire du rectangle $REFT$ soit maximale ?



Les réponses de trois élèves de seconde

Élève 1

Je pose $x = RH$.
D'après le théorème de Thalès dans le triangle HBA : $\dfrac{BR}{BH} = \dfrac{ER}{AH}$ *donc* $\dfrac{9-x}{9} = \dfrac{ER}{h}$.
Le calcul de h donne : $h = \sqrt{18^2 - 9^2} = \sqrt{243} = 9\sqrt{3}$. *On obtient* $ER = 9\sqrt{3} \times \dfrac{9-x}{9} = \sqrt{3}(9-x)$.
L'aire est : $A = \sqrt{3} \times 2x(9-x)$.
En affichant à la calculatrice la fonction $f(x) = x(9-x) \times 2\sqrt{3}$, *j'obtiens en lisant dans la table des valeurs un maximum en* $x = 4$ *et* $x = 5$.

Élève 2

À l'aide d'un logiciel, j'ai construit la figure. Je cherche ensuite la plus grande aire possible.
En déplaçant le point R sur le côté du triangle, j'obtiens $BR = 4{,}48$ *environ pou un maximum de l'aire.*
Il nous faut donc placer le point R à 4,48 *du point B.*

Élève 3

J'ai calculé l'aire du rectangle pour $BR = 1$ *cm* : $h = 18\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ *et* $BH = 9$ *cm.*
Dans le triangle ABH : $\dfrac{BR}{BH} = \dfrac{ER}{h}$. *Donc* $\dfrac{1}{9} = \dfrac{ER}{9\sqrt{3}}$ *d'où* $ER = \sqrt{3}$ *et* $A = \ell \times L = 2 \times 8 \times \sqrt{3} \approx 27{,}7$ cm^2.
De même, pour $BR = 2$ *cm,* $A = 2 \times 7 \times 2\sqrt{3} \approx 48{,}5$ cm^2 *; pour* $BR = 3$ *cm,* $A \approx 62{,}4$ cm^2.
Pour $BR = 4$ *cm et pour* $BR = 5$ *cm, je trouve* 69,28 cm^2 *puis cela diminue.*
Le maximum est donc obtenu pour une valeur de BR *entre* 4 *cm et* 5 *cm.*

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la démarche de chaque élève en mettant en évidence leurs compétences en termes de conjecture et de démonstration.

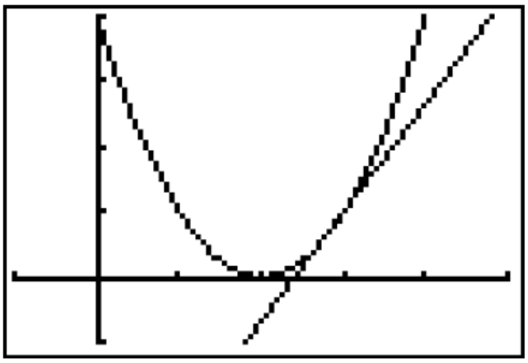
2- Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3- Proposez deux *problèmes d'optimisation*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous souhaitez développer chez les élèves.

Thème : problèmes avec prise d'initiative

L'exercice

À l'aide d'une calculatrice, on a obtenu la droite d'équation $y = \frac{5}{3}x - 4$ et la courbe représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 4$.



La droite semble tangente à la courbe. Est-ce bien le cas ?

D'après manuel Transmath première S, Nathan

Les réponses de deux élèves

Élève 1

J'ai résolu l'équation $x^2 - 4x + 4 = \frac{5}{3}x - 4$, j'ai trouvé deux solutions, et après je ne sais pas comment faire.

Élève 2

Le coefficient directeur de la tangente, c'est $\frac{5}{3}$, alors où c'est tangent on doit avoir $f'(x) = \frac{5}{3}$.
Je dérive f et je résous l'équation $f'(x) = \frac{5}{3}$. J'ai trouvé $\frac{17}{6}$, je fais comment après ?

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en valeur leurs compétences en matière de prise d'initiative et en précisant les conseils à leur apporter pour qu'ils surmontent leurs difficultés.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe en vous appuyant sur une des productions d'élèves.

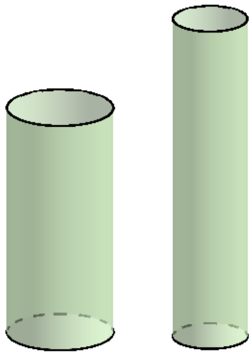
3 – Proposez deux exercices sur le thème *problèmes avec prise d'initiative* dont l'un au niveau collège. Vous prendrez soin de motiver vos choix.

Thème : grandeurs et mesures

L'exercice

On dispose d'une feuille de papier de format A4, qui a donc pour dimensions 21 cm × 29,7 cm.
À partir de cette feuille, on veut fabriquer une boîte ayant une forme cylindrique.
Pour cela, on peut enrouler la feuille bord à bord de deux manières et obtenir deux boîtes différentes :

- l'une dont la hauteur est de 21 cm ;
- l'autre dont la hauteur est de 29,7 cm.



1. Laquelle de ces deux boîtes a le plus grand volume ?
2. Plus généralement, quelle méthode donne le plus grand volume si on part d'une feuille de papier de largeur x cm et de longueur y cm, avec $x < y$?

Les réponses de deux élèves de seconde à la question 1

Élève 1

Étant donné que j'utilise la même feuille, les volumes seront identiques.
Le volume sera exactement de $21 \times 29{,}7 = 623$.

Élève 2

Je construis les cylindres avec une feuille de papier. Je mesure à chaque fois le diamètre au millimètre près. Je trouve 9 *cm pour la première méthode et* 6,5 *cm pour la deuxième. En prenant* $\pi = 3{,}14$*, j'obtiens un volume de* $1\,335\,cm^3$ *pour la première méthode et* $985\,cm^3$ *pour la deuxième. La première méthode donne donc le meilleur résultat.*

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs compétences dans le domaine *grandeurs et mesures*.

2- Présentez une correction de la question 2 de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3- Proposez deux ou trois exercices sur le thème *grandeurs et mesures* dont l'un au moins favorise la prise d'initiative. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

Thème : différents types de raisonnement

L'exercice

Pour chacune des affirmations suivantes, vous indiquerez si elle est vraie ou fausse, en justifiant votre réponse :

1 – Le carré d'un entier naturel impair est impair.

2 – Si le carré d'un entier naturel n est pair, alors n est pair.

3 – Dans un triangle non aplati, les médiatrices de deux côtés sont sécantes.

4 – Pour tout triangle non aplati ABC, le pied H de sa hauteur issue de A sur la droite (BC) appartient au segment [BC].

5 – Pour tout triangle ABC rectangle en A, le pied H de sa hauteur issue de A sur la droite (BC) appartient au segment [BC].

6 – Pour tout entier n, le nombre $n(n^2+5)$ est divisible par 3.

Extrait du programme de seconde : raisonnement mathématique (objectifs pour le lycée)

Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples :

- à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;
- à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles $\forall$, $\exists$ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
- à distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- à utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- à formuler la négation d'une proposition ;
- à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- à reconnaître et à utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Expliquez en quoi cet exercice répond aux recommandations du paragraphe « raisonnement mathématique, objectifs pour le lycée » inséré dans le programme de la classe de seconde.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

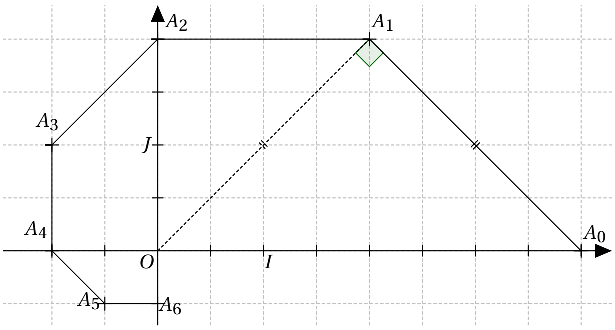
3 – Proposez trois exercices sur le thème *différents types de raisonnement*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

Thème : problèmes conduisant à l'étude de suites

L'exercice

On se place dans un repère orthonormé (O, I, J).
A_0 est le point de coordonnées $(4,0)$. On construit les points $A_1, A_2, \ldots$ de telle manière que, pour tout entier naturel n, le triangle OA_nA_{n+1} soit rectangle isocèle en A_{n+1}.

1. On considère la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $d_n = A_nA_{n+1}$.
   (a) Calculer d_0, d_1, d_2.
   (b) Montrer que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et préciser sa raison et son premier terme.
2. Calculer la longueur de la « spirale infinie » $A_0, A_1, A_2 \ldots$



Les réponses de deux élèves de Terminale S

Élève 1

1. On considère la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $d_n = A_nA_{n+1}$.
(a) D'après le théorème de Pythagore : $4^2 = OA_1{}^2 + A_1A_0{}^2$, donc $16 = 2A_1A_0{}^2$, d'où $d_0 = 2\sqrt{2}$.
$(2\sqrt{2})^2 = 2A_1A_2{}^2$, d'où $d_1 = A_1A_2 = 2$; $2^2 = 2A_2A_3{}^2$, d'où $d_3 = A_2A_3 = \sqrt{2}$.
(b) Je constate que la suite est géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et de premier terme $2\sqrt{2}$.

2. La longueur de la spirale augmente avec les valeurs de n, on peut donc dire que la longueur totale n'existe pas car elle est infinie.

Élève 2

1. On considère la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $d_n = A_nA_{n+1}$.
(a) J'utilise la formule $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$:
$d_0 = \sqrt{(2-4)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8}$; $d_1 = \sqrt{(0-2)^2 + (2-2)^2} = 2$; $d_2 = \sqrt{(-1-0)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}$.
(b) La suite semble être géométrique de raison $0{,}7$ et de premier terme $\sqrt{8}$.

2. J'applique la formule de la somme des termes :
$d_0 + \ldots + d_n = d_0 \dfrac{1 - 0{,}7^n}{1 - 0{,}7}$. Je trouve que la longueur de la spirale se rapproche de $3{,}3\, d_0 \approx 9$.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez les productions de ces deux élèves en étudiant notamment la pertinence de la démarche et les compétences dans le domaine des suites.

2- Présentez une correction de la question 2 de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3- Proposez deux ou trois exercices sur le thème *problèmes conduisant à l'étude de suites* à des niveaux de classe différents. Vous prendrez soin de motiver vos choix.

Thème : probabilités

L'exercice

Un commerçant vend des boîtes de thé dont 80 % proviennent d'un fournisseur A et 20 % d'un fournisseur B. 10 % des boîtes provenant du fournisseur A et 20 % de celles provenant du fournisseur B contiennent des pesticides.

1 – Le commerçant considère que 88 % des boîtes de thé qu'il vend ne contiennent pas de pesticides. A-t-il raison ?

2 – Lorsqu'on achète 10 boîtes de thé chez ce commerçant, on peut assimiler cet achat à un tirage aléatoire avec remise compte tenu de l'importance du stock. Quelle est la probabilité que, sur 10 boîtes achetées, au moins huit ne contiennent pas de pesticides ?

3 – À des fins publicitaires, le commerçant affiche sur ses plaquettes « 97 % de notre thé est garanti sans pesticides ». Un inspecteur de la brigade de répression des fraudes souhaite étudier la validité de l'affirmation.
À cette fin, il prélève 200 boîtes au hasard dans le stock du commerçant et en trouve 23 contenant des pesticides. Au vu de ces résultats, quelle peut être la réaction de l'inspecteur de la brigade de répression des fraudes ?

D'après le document ressources pour la classe de terminale *Exercices de mathématiques*.

Les réponses de deux élèves à la question 2

Élève 1

J'ai reconnu la loi binomiale : $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ avec $n=10$, $p=0,88$ et $k=8$.
La probabilité est donc environ $0,233$.

Élève 2

J'utilise la loi binomiale. Le succès S correspond à « 8 boîtes sur 10 ne contiennent pas de pesticides » et l'échec $\overline{S}$ correspond à « plus de deux boîtes contiennent des pesticides ».
On doit calculer $P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)$.
J'utilise la calculatrice *binomFdp(n,p,k)* avec $n=10$, $p=0,8$ et $k=8$
puis : *binomFdp(n,p,k)* avec $n=10$, $p=0,9$ et $k=9$
et enfin : *binomFdp(n,p,k)* avec $n=10$, $p=1$ et $k=10$.
On obtient : $P(X\geq 8)\approx 0,302+0,387+1\approx 1,689$, puis on calcule la moyenne : $1,689/3=0,563$.
Donc on a 56 % de chances d'avoir au moins 8 boîtes sur 10 ne contenant pas de pesticides.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs.

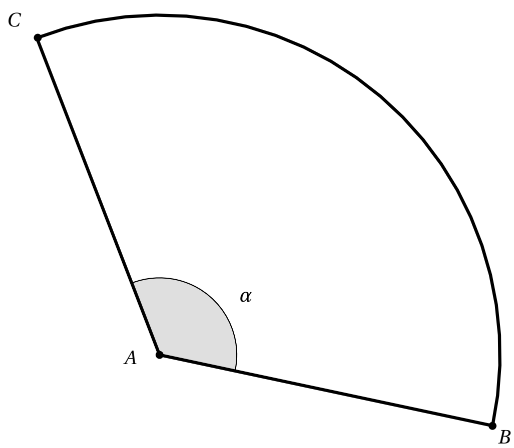
2 – Présentez une correction de la question 3 telle que vous l'exposeriez devant des élèves.

3 – Proposez deux exercices sur le thème *probabilités* à des niveaux de classe différents. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

Thème : optimisation

L'exercice

Un secteur circulaire a pour périmètre p, où p désigne un nombre réel strictement positif fixé.
Quelle doit être la mesure de son angle au centre α pour que son aire soit la plus grande possible ?



Les réponses de deux élèves de première S

Élève 1

Je construis la figure avec un logiciel. Pour simplifier, je prends $p = 10$. Je construis A et B, et je prends C sur le cercle de centre A passant par B. J'affiche le périmètre du secteur et je fais varier C pour que le périmètre soit égal à 10. Ensuite j'affiche l'aire, et je recommence avec d'autres positions de B. L'aire est la plus grande quand le rayon est entre 2 et 3.

Élève 2

J'ai trouvé les formules du périmètre et de l'aire sur internet : $p = r(2+\alpha)$ et $S = \dfrac{1}{2}\alpha r^2$.
J'en déduis $S = \dfrac{1}{2}p^2 \times \dfrac{\alpha}{(2+\alpha)^2}$.
Je cherche le maximum de la courbe avec ma calculatrice, et je trouve que α vaut à peu près 2.
J'ai dû me tromper car avec un angle de 2°, l'aire est trop petite.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs compétences et en précisant l'aide qui pourrait leur permettre de mener à bien leur démarche.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique, en vous appuyant sur les productions des élèves.

3 – Proposez deux exercices sur le thème *optimisation*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

Thème : arithmétique

L'exercice

Le 7 décembre 2014, un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A qui apparaît périodiquement tous les 105 jours.
Six jours plus tard (J_0+6), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours.
On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.

1 – Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?

2 – Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, aura-t-il la possibilité d'observer une nouvelle conjonction des deux astres avant fin 2020 ?

Les réponses de deux élèves à la question 1

Élève 1

J'ai fait une colonne pour le corps céleste A et une colonne pour le corps céleste B.
J'ai tapé dans A2 la formule $= A1+105$ et dans B2 la formule $= B1+81$, puis j'ai recopié vers le bas.

On voit 735 dans les deux colonnes.
Il s'écoulera donc 735 jours, soit 2 ans et 5 jours, entre J_0 et J_1.

J_1 sera le 12 décembre 2016.

	A	B
1	0	6
2	105	87
3	210	168
4	315	249
5	420	330
6	525	411
7	630	492
8	**735**	573
9	840	654
10	945	**735**
11	1050	816

Élève 2

Le problème revient à résoudre $105x-81y=6$ *ce qui équivaut à* $35x-27y=2$.

$35x-27y=2$ *équivaut à* $35x=2+27y$ *ce qui revient à* $35x\equiv 2\,[27]$ *ou encore* $8x\equiv 2\,[27]$
c'est-à-dire $4x\equiv 1\,[27]$ *; avec ma calculatrice j'ai trouvé* $x\equiv 7\,[27]$. *Donc* $x=7+27k$.

$35x-27y=2$ *équivaut à* $27y=-2+35x$ *ce qui revient à* $27y\equiv -2\,[35]$ *ou encore* $-8y\equiv -2\,[35]$
c'est-à-dire $4y\equiv 1\,[35]$ *; avec ma calculatrice j'ai trouvé* $y\equiv 9\,[35]$. *Donc* $y=9+35k$.

En posant $k=0$, je trouve $x=7$.
Donc il se sera écoulé $105\times 7=735$ jours entre J_0 et J_1.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence les compétences acquises et leurs erreurs éventuelles.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3 – Proposez deux ou trois exercices sur le thème *arithmétique*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

Thème : conjecture et démonstration

L'exercice

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x}$ et $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

On note :

- $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé du plan ;
- a un réel quelconque ;
- M le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a et N le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse a ;
- $\mathscr{D}$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ en M et Δ la tangente à $\mathscr{C}_g$ en N ;
- P et Q les points d'intersection respectifs de $\mathscr{D}$ et Δ avec l'axe des abscisses.

Conjecturer et démontrer une propriété des droites $\mathscr{D}$ et Δ ainsi qu'une propriété de la distance PQ.

Extraits d'un programme officiel et d'un document ressource

Document ressource "Les compétences mathématiques au lycée"

La formation mathématique au lycée général et technologique vise [...] le développement de compétences spécifiques aux mathématiques : chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner, communiquer. [...]
La résolution de problèmes est un cadre privilégié pour développer, mobiliser et combiner plusieurs de ces compétences.

Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques
Classe terminale de la série scientifique

L'utilisation de logiciels, d'outils de visualisation et de simulation, de calcul (formel ou scientifique) et de programmation change profondément la nature de l'enseignement en favorisant une démarche d'investigation.
En particulier lors de la résolution de problèmes, l'utilisation de logiciels de calcul formel limite le temps consacré à des calculs très techniques afin de se concentrer sur la mise en place de raisonnements.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Précisez en quoi l'exercice proposé permet de développer, mobiliser et combiner les compétences explicitées dans le document ressource.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique. Vous mettrez en évidence ce que peut apporter l'utilisation d'outils logiciels.

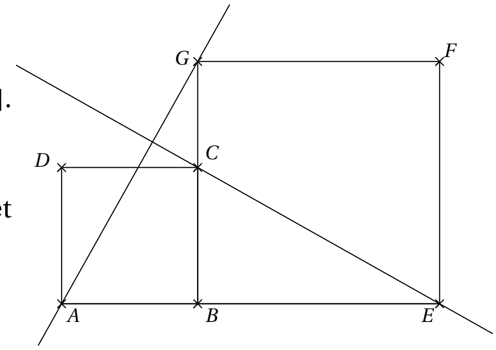
3 – Proposez deux exercices sur le thème *conjecture et démonstration*, dont l'un au moins de niveau collège. Vous motiverez vos choix en précisant les objectifs visés par chacun d'eux.

Thème : géométrie plane

L'exercice

Dans la figure ci-contre, le point B est un point du segment $[AE]$.
$ABCD$ et $BEFG$ sont des carrés.

Montrer que les droites (AG) et (EC) sont perpendiculaires et que les segments $[AG]$ et $[EC]$ ont même longueur.



Les réponses de deux élèves

Élève 1

Je considère le triangle AEG.
(GB) est perpendiculaire à (AB).
(AC) est perpendiculaire à (EG) car ce sont les diagonales de deux carrés côte à côte.
Donc (EC) est perpendiculaire à (AG).

De plus ABG et BCE sont deux triangles identiques donc $AG = CE$.

Élève 2

Avec $A(0;0)$, $E(1;0)$, $C(b;b)$ et $G(b;1)$, on a $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} b-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix} b-1 \\ b-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-1 \\ b \end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EC} = b\times(b-1)+1\times b = b^2$.
$b^2 \neq 0$, donc les droites (AG) et (EC) ne sont pas perpendiculaires.

On a $AG = \sqrt{b^2+1^2}$ et $EC = \sqrt{(b-1)^2+b^2} = \sqrt{2b^2-2b+1}$.
Je ne trouve pas la même chose, il doit y avoir une erreur.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs.

2 – Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe dont vous préciserez le niveau.

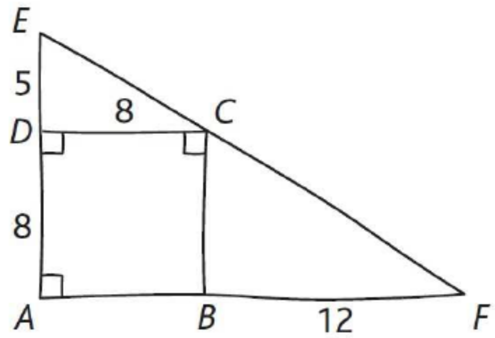
3 – Proposez deux exercices sur le thème *géométrie plane*, dont l'un au moins nécessite l'utilisation d'un logiciel de géométrie. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

Thème : géométrie plane

L'exercice

La figure ci-contre est dessinée à main levée.
Les points A, D, E et A, B, F sont alignés.
Les dimensions sont exprimées en cm.

Les points E, C et F sont-ils alignés ?



D'après manuel Déclic seconde

Les réponses de trois élèves

Élève 1

Dans le triangle rectangle DEC, avec le théorème de Pythagore :
on a $EC^2 = DC^2 + DE^2 = 8^2 + 5^2 = 89$, *d'où* $EC = 9{,}4$.
Dans le triangle rectangle CFB, *on a* $CF^2 = BF^2 + BC^2 = 12^2 + 8^2 = 208$, *d'où* $CF = 14{,}4$.
Dans le triangle rectangle FAE : $EF^2 = AF^2 + AE^2 = 20^2 + 13^2 = 569$, *d'où* $EF = 23{,}8$.
On a $9{,}4 + 14{,}4 = 23{,}8$, *c'est-à-dire* $CF + EC = EF$.
Donc E, C et F sont alignés.

Élève 2

J'applique le théorème de Thalès qui dit que $\dfrac{FB}{FA} = \dfrac{BC}{AE}$, *donc* $\dfrac{12}{20} = \dfrac{8}{13}$, *donc* $156 = 160$.
C'est faux, j'ai dû faire une erreur.

Élève 3

$\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix} 8-0 \\ 8-13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 20-0 \\ 0-13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -13 \end{pmatrix}$.
$\dfrac{8}{-5} = \dfrac{20}{-13}$, *donc* $-1{,}5 \neq -1{,}6$.
donc $\overrightarrow{EC}$ *et* $\overrightarrow{EF}$ *ne sont pas colinéaires, donc les points E, C et F ne sont pas alignés.*

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez chacune des productions d'élèves en mettant en évidence leurs réussites et en précisant l'aide qui pourrait leur permettre de mener à bien leur démarche.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3 – Proposez deux ou trois exercices sur le thème *géométrie plane*, dont l'un au moins favorise la prise d'initiative. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

Thème : prise de décision

L'exercice

Pour chacune des propositions suivantes, dire si la proposition est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

L'entreprise MICRO vend en ligne du matériel informatique, notamment des ordinateurs portables et des clés USB.

Partie A

L'autonomie de la batterie qui équipe les ordinateurs portables distribués par la société MICRO, exprimée en heure, suit une loi normale d'espérance $\mu = 8$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

Proposition 1 : la probabilité que l'ordinateur ait une autonomie supérieure ou égale à 10 h est inférieure à 0,2.

Partie B

L'entreprise MICRO vend également des clés USB et communique sur ce produit en affirmant que 98 % des clés commercialisées fonctionnent correctement. Sur 1 000 clés prélevées dans le stock, 50 clés se révèlent défectueuses.

Proposition 2 : ce test, réalisé sur ces 1 000 clés, ne remet pas en cause la communication de l'entreprise.

D'après un sujet de baccalauréat

Les réponses de trois élèves de Terminale S à la partie B

Élève 1

Il y a 950 clés qui fonctionnent correctement, ce qui fait 95 % *: c'est moins que ce que dit l'entreprise, mais on peut dire qu'on n'a pas eu de chance avec le lot car ça n'est pas très loin de* 98 %.

Élève 2

J'ai préparé sur tableur une simulation en entrant `=SI(ALEA()<0,98;1;0)`*, que j'ai recopié pour avoir 1000 clés et j'ai compté le nombre de fois où on obtient 1 : en relançant le calcul, cela varie, mais tout le temps au-dessus de 950 : on peut donc penser qu'il y a un problème dans la communication.*

Élève 3

J'utilise l'intervalle vu en seconde :

$$I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}98 - \frac{1}{\sqrt{1\,000}}\,;0{,}98 + \frac{1}{\sqrt{1\,000}}\right] = [0{,}948\,;1{,}012]\,.$$

Il n'y a donc pas de problème.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la capacité de chaque élève à s'engager dans une démarche de recherche.

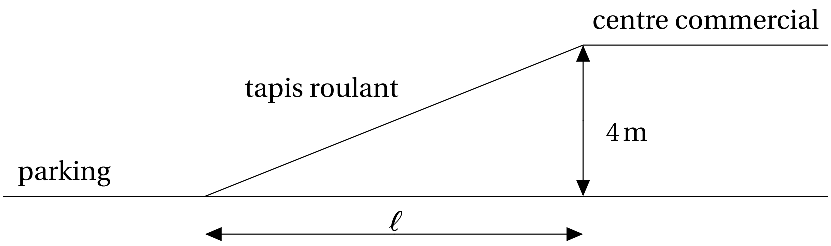
2- Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique, en appuyant éventuellement votre propos sur une simulation.

3- Proposez deux exercices sur le thème *prise de décision* à des niveaux de classe différents. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

Thème : problème avec prise d'initiative

L'exercice

On souhaite installer un tapis roulant permettant aux clients d'un centre commercial de passer du parking souterrain aux commerces en moins d'une minute. Le tapis roulant sélectionné possède une vitesse de déroulement de 0,75 m/s et peut présenter une pente maximale de 10 %. Le schéma ci-dessous présente les caractéristiques géométriques du lieu.



La pente p est donnée par : $p = \dfrac{4}{\ell}$, où la longueur ℓ est exprimée en m.
L'architecte des travaux s'interroge sur les positions possibles pour faire débuter le tapis roulant.
Pouvez-vous l'aider ?

Extrait du document ressource pour la classe de seconde - Fonctions

Quels sont les objectifs à atteindre ?
Comme dans toutes les parties du programme, les paragraphes qui précèdent les tableaux précisant les contenus et les capacités attendues, fixent de façon nette les objectifs à atteindre et les déclinent en termes de **nature des problèmes que les élèves doivent savoir résoudre, précisant également le degré d'autonomie attendu.**
Ces objectifs sont ambitieux, le degré d'autonomie que les élèves doivent montrer pouvant être maximal : autonomie du choix de la démarche, de la nature du traitement à apporter, de la modélisation à mettre en oeuvre.
Construire chez tout élève cette autonomie nécessite une formation adaptée incluant une confrontation fréquente à des problèmes posés sous forme ouverte.
Le programme fixe comme objectif la maîtrise de problèmes d'optimisation ou du type « $f(x) > k$ ».

- Dans un premier temps un élève doit pouvoir résoudre un tel problème, de façon exacte ou approchée, à l'aide d'un graphique et de façon exacte si les variations de la fonction et les antécédents de k sont connus.
- Dans un second temps cette étude peut être faite, selon le cas, en exploitant les potentialités de logiciels, graphiquement ou algébriquement, toute autonomie pouvant être laissée pour associer au problème une fonction.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Précisez en quoi un tel exercice répond aux objectifs mentionnés dans le document ressource.

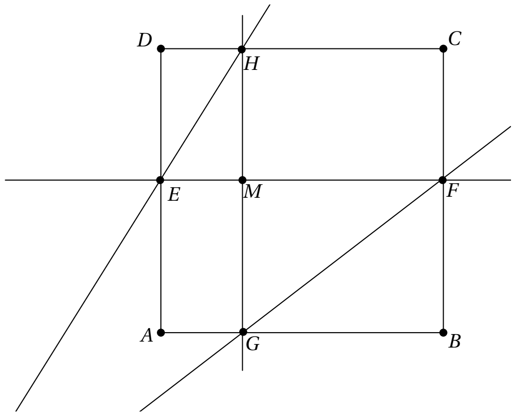
2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3 – Proposez deux ou trois exercices sur le thème *problèmes avec prise d'initiative* à des niveaux de classes différents dont l'un au moins pour des élèves de collège. Vous prendrez soin de motiver vos choix.

Thème : conjecture et démonstration

L'exercice

$ABCD$ est un carré. On place un point M à l'intérieur du carré.
La droite parallèle à (AB) passant par M coupe $[AD]$ en E et $[BC]$ en F.
La droite parallèle à (AD) passant par M coupe $[AB]$ en G et $[CD]$ en H.
L'objectif est de déterminer quelles sont les positions du point M pour lesquelles (EH) et (FG) sont parallèles.



Les productions de deux groupes d'élèves de seconde

Production 1

D'après le théorème de Thalès, $(EH) \mathbin{/\!/} (FG)$ *si* $\dfrac{EM}{MF} = \dfrac{HM}{MG} = \dfrac{EH}{GF}$ *donc* $EM \times MG = MF \times HM$.

$EM \times MG$ *est l'aire du rectangle* $EMGA$ *et* $MF \times HM$ *est l'aire du rectangle* $HCFM$.
Donc, $(EH) \mathbin{/\!/} (FG)$ *si l'aire de* $EMGA$ *est égale à l'aire de* $HCFM$.
Si $M \in (DB)$ *alors* $EMGA$ *est le symétrique de* $HCFM$ *par rapport à* (DB).
Donc si $M \in (DB)$ *alors* $(EH) \mathbin{/\!/} (FG)$.

Production 2

Comme on l'a remarqué avec le logiciel de géométrie, le point M *devra appartenir à la diagonale* $[DB]$ *pour que les segments* $[EH]$ *et* $[GF]$ *soient parallèles.*

On veut montrer que les vecteurs $\overrightarrow{EH}$ *et* $\overrightarrow{GF}$ *sont colinéaires.*
Pour cela, il faudra mettre en place un repère orthonormé pour déterminer les coordonnées des vecteurs et ensuite il faudra faire les produits en croix.

On suppose que $E\left(0\,;y\right)$, $G\,(x\,;0)$, $H\,(x\,;1)$ *et* $F\left(1\,;y\right)$.

$$\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix} x_H - x_E \\ y_H - y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1-y \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{GF}\begin{pmatrix} x_F - x_G \\ y_F - y_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} xy &= \left(1-y\right)(1-x) \\ xy &= 1-x-y+xy \\ 0 &= 1-x-y \end{aligned}$$

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions des élèves en étudiant notamment la pertinence de la démarche et des outils utilisés ainsi que les compétences construites.

2 – Présentez, en vous appuyant sur les productions des élèves, une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3 – Proposez deux exercices sur le thème *conjecture et démonstration*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

Thème : optimisation

L'exercice

$AB = 2$

Sur la figure ci-dessus, $ABCD$ est un rectangle et BMC est un triangle rectangle en B.
On donne les longueurs $AB = 2$ et $CM = 1$.
Peut-on faire en sorte que l'aire du trapèze $AMCD$ soit maximale ? Si oui, dans quel cas ?

Les réponses de deux élèves

Élève 1

À l'aide d'un logiciel de géométrie, j'ai calculé l'aire du trapèze $AMCD$. J'obtiens une aire maximale de 2,058 pour $BM = 0{,}226$. À l'aide du théorème de Pythagore je calcule $BC = 0{,}974$.
L'aire du rectangle $ABCD$ est égale à $2 \times BC = 1{,}948$.
L'aire du triangle rectangle BMC est égale à 0,110. En faisant la somme on obtient bien 2,058.

Élève 2

J'ai pris $BM = x$, l'aire du trapèze AMCD est égale à $\dfrac{1}{2}(4+x)\sqrt{1-x^2}$.
Avec un logiciel de calcul formel, j'ai obtenu

1	*dériver* $\frac{1}{2}(4+x)\sqrt{1-x^2}$
	$(2x^2+4x-1) * \sqrt{1-x^2}/(2x^2-2)$
2	*résoudre* $(2x^2+4x-1) * \sqrt{1-x^2}/(2x^2-2) = 0$
	$1/2 * (-\sqrt{6}-2), 1/2 * (\sqrt{6}-2)$

Comme x est une longueur, x est positif, l'aire est maximale pour $BM = \dfrac{1}{2} \times (\sqrt{6}-2)$.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez à une classe de première scientifique, en vous appuyant sur les productions des élèves.

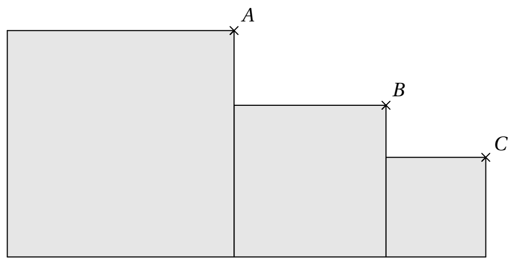
3 – Proposez deux exercices sur le thème *optimisation* à des niveaux de classe différents et dont l'un au moins nécessite la mise en oeuvre d'un logiciel de géométrie dynamique. Vous motiverez vos choix.

Thème : problèmes avec prise d'initiative

L'exercice

On considère la figure ci-contre formée de 3 carrés.
Le premier carré a pour côté 1.
Le côté du deuxième carré est une réduction du côté du premier carré et le côté du troisième carré est une réduction du côté du deuxième carré. Les deux coefficients de réduction sont égaux.

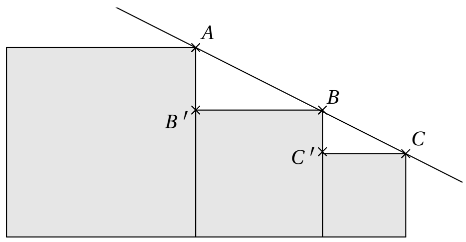
Les points A, B et C sont-ils alignés ?



Les réponses de deux élèves de seconde

Élève 1

J'ai placé B' et C' et j'ai tracé la droite (AC).
Dans le triangle $BC'C$ rectangle en C', les angles $\widehat{C'BC}$ et $\widehat{C'CB}$ sont complémentaires.
$\widehat{C'BB'} = 90°$ donc $\widehat{B'BA}$ est complémentaire à $\widehat{C'BC}$.
Ce qui fait que $\widehat{B'BA} = \widehat{C'CB}$.
Donc les coefficients directeurs sont égaux
et les points A, B et C sont alignés.



Élève 2

On utilise les coordonnées des points A, B, C qui sont les longueurs des côtés des carrés.
On a $A(1;1)$, $B\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{2}{3}\right)$. Après j'utilise les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
On regarde s'ils sont colinéaires : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$ où k est le coefficient mais je ne trouve pas.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3 – Proposez deux exercices sur le thème *problèmes avec prise d'initiative* dont l'un au moins nécessite l'utilisation d'un logiciel. Vous motiverez vos choix en expliquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

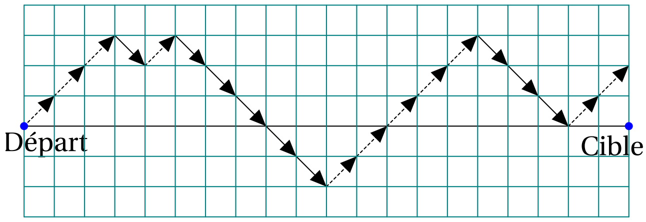
Thème : probabilités

L'exercice

Le robot Tom doit atteindre une cible située face à lui. Sa démarche est particulière :

- soit il se déplace d'un pas en diagonale vers la gauche ;
- soit il se déplace d'un pas en diagonale vers la droite.

On suppose que ces deux types de déplacement sont aléatoires et équiprobables et que le robot Tom effectue exactement 20 pas. La figure ci-dessous illustre un déplacement de trois pas à gauche, puis un à droite, un à gauche, cinq à droite, cinq à gauche, trois à droite et enfin deux à gauche. Le robot Tom n'a pas atteint ici la cible.



1 – Après avoir mis en place une simulation de cette marche aléatoire, donner une approximation de la probabilité p que le robot atteigne la cible.

2 – Déterminer la valeur exacte de p ainsi que sa valeur arrondie au millième, puis confronter le résultat avec celui de la première question.

D'après un sujet de baccalauréat.

Les réponses de deux élèves à la question 1

Élève 1

Affecter à N la valeur 0
pour *j allant de* 1 *à* 10 000 **faire**
  Affecter à D la valeur 0
  pour *k allant de* 1 *à* 20 **faire**
    A prend la valeur aléatoire 0 ou 1
    si $A = 0$ **alors**
      D prend la valeur $D + 1$
    fin
  fin
  si $D = 10$ **alors**
    N prend la valeur $N + 1$
  fin
fin
Afficher $\dfrac{N}{10\,000}$

En utilisant cet algorithme un grand nombre de fois, j'obtiens un affichage toujours compris entre 0,17 *et* 0,18.
Donc la probabilité p est comprise entre 0,17 *et* 0,18.

Élève 2

J'ai simulé 100 marches aléatoires à l'aide du tableur, j'obtiens une probabilité de rejoindre la cible égale à 0,21. *J'ai appuyé environ une centaine de fois sur la touche F9 et j'ai observé très rarement des probabilités en dehors de* [0,10 ; 0,25]. *Donc la probabilité p cherchée est comprise entre* 0,10 *et* 0,25.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites.

2 – Présentez une correction de la question 2 telle que vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique.

3 – Proposez deux exercices sur le thème *probabilités*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

Thème : optimisation

L'exercice

Dans un repère, on considère la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2}{9}x^2 - 8$.

A et B sont les points de cette courbe d'abscisses respectives -6 et 6.
Le point P est un point variable sur cette courbe, d'abscisse a comprise entre -6 et 6.
Le point H a pour coordonnées $(a, 0)$.

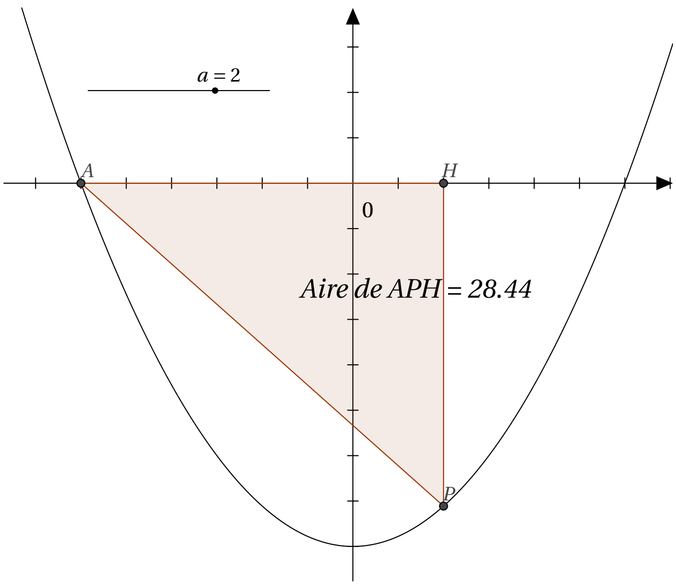
L'aire du triangle APH admet-elle un maximum ?

Les réponses de deux élèves de première

Élève 1

Soit $\mathscr{A}(a)$ l'aire de APH.
$\mathscr{A}(a) = \dfrac{HP \times AH}{2} = \dfrac{f(a) \times (a - (-6))}{2}$.
On trouve $\mathscr{A}(a) = \frac{1}{9}a^3 + \frac{6}{9}a^2 - 4a - 24$.
Je trace la courbe à la calculatrice, je ne trouve que des valeurs négatives. Il doit y avoir une erreur.

Élève 2



J'ai fait une construction sur le logiciel, et j'ai trouvé un maximum de 28,44 *pour* $a = 2$.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et la pertinence de leur démarche.

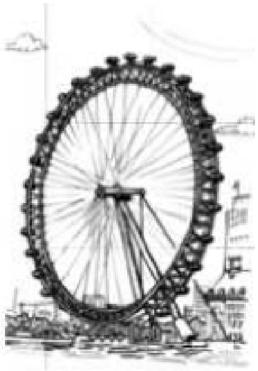
2- Proposez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première, en vous appuyant sur les différentes productions d'élèves.

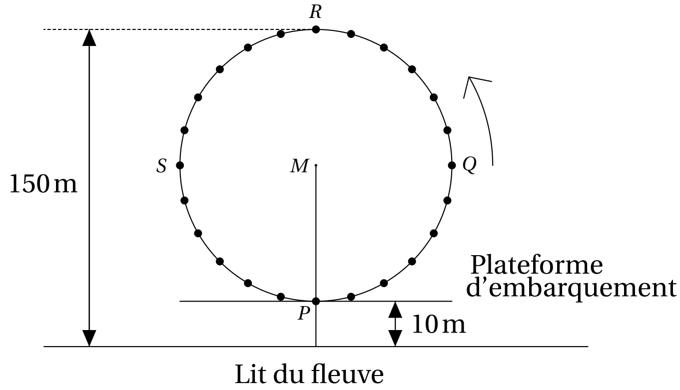
3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *optimisation*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

Thème : grandeurs et mesures

L'exercice

Une grande roue est installée sur les rives d'un fleuve. En voici un dessin et un schéma.





Le diamètre externe de la grande roue est de 140 mètres et son point le plus élevé se situe à 150 mètres au-dessus du lit du fleuve. Elle tourne dans le sens indiqué par la flèche.

1 – La lettre M sur le schéma indique le centre de la roue. À combien de mètres au-dessus du lit du fleuve se trouve le point M ?

2 – La grande roue tourne à une vitesse constante. Elle effectue un tour complet en 40 minutes exactement. Jean commence son tour de roue au point d'embarquement P. Où se trouvera Jean après une demi-heure ?

3 – Chaque nacelle peut accueillir au maximum 4 personnes. Combien de personnes au maximum peuvent embarquer sur la roue en un quart d'heure ?

D'après Évaluation Pisa 2012.

Extrait du livret personnel de compétences, socle commun de connaissances et de compétences palier 3

Pratiquer une démarche scientifique et technologique, résoudre des problèmes.
- Rechercher, extraire et organiser l'information utile.
- Réaliser, manipuler, mesurer, calculer, appliquer des consignes.
- Raisonner, argumenter, pratiquer une démarche expérimentale ou technologique, démontrer.
- Présenter la démarche suivie, les résultats obtenus, communiquer à l'aide d'un langage adapté.

Le travail à exposer devant le jury

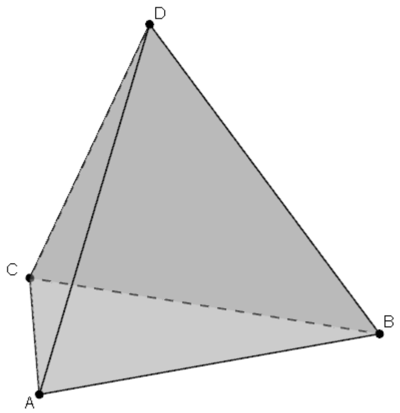
1 – Précisez en quoi l'exercice proposé permet de mobiliser et développer les compétences mentionnées ci-dessus, dans l'extrait du livret personnel de compétences.

2 – Présentez une correction de l'exercice comme vous le feriez devant une classe de collège.

3 – Proposez trois exercices à des niveaux différents sur le thème *grandeurs et mesures*. Vous expliciterez les objectifs visés par chacun d'eux.

Thème : géométrie dans l'espace

L'exercice



On considère un tétraèdre régulier $ABCD$ de côté a.

Que peut-on dire des arêtes opposées $[AB]$ et $[CD]$?

Les réponses de trois élèves de Terminale S

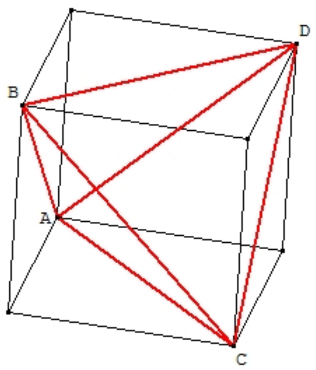
Élève 1

On se place dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. *Les coordonnées des vecteurs sont* $\overrightarrow{AB}(1,0,0)$ *et* $\overrightarrow{CD}(0,-1,1)$. *Je calcule le produit scalaire* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. *Donc les arêtes sont orthogonales.*

Élève 2

Je raisonne avec $a = 1$. *Par la relation de Chasles,* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 1 - 1 = 0$.
Donc les droites (AB) *et* (CD) *ont orthogonales.*

Élève 3



On met le tétraèdre dans un cube et on peut comme cela construire la figure avec un logiciel. En faisant tourner, on voit que les arêtes sont orthogonales, ce qui est validé par le logiciel.
On peut après remarquer que les arêtes sont deux diagonales de faces carrées identiques, elles sont donc orthogonales.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez les productions de ces trois élèves en mettant en évidence leurs compétences dans le domaine de la géométrie dans l'espace.

2- Proposez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *géométrie dans l'espace*. Vous indiquerez à chaque fois les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.