Thème : problème conduisant à l'étude de suites

L'exercice

Un magazine est vendu uniquement par abonnement. On a constaté qu'il y a 1800 nouveaux abonnés chaque année et que d'une année sur l'autre, 15 % des abonnés ne se réabonnent pas (on suppose que ce processus se maintient chaque année). En 2014, il y avait 8000 abonnés.

1 – Écrire un algorithme permettant de déterminer l'année à partir de laquelle le magazine dépassera la barre des 11500 abonnés. Donner le résultat affiché.

2 – Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de milliers d'abonnés en $(2014+n)$ et on pose $v_n = u_n - 12$.

(a) Établir que la suite (v_n) est géométrique.

(b) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

(c) Retrouver le résultat de la question 1.

Deux productions d'élèves

Question 1.

Mon algorithme ne fonctionne pas.

Variables	N entier naturel et U réel

Traitement	U prend la valeur 8
	Tant que $U < 11,5$ faire
	    N prend la valeur 0
	    U prend la valeur $0,85 \times U + 1,8$
	    N prend la valeur $N+1$
	Fin tant que

Sortie	Afficher N

Question 2.

A	B	C	D
0	8,00	−4,00	
1	8,60	−3,40	0,85
2	9,11	−2,89	0,85
3	9,54	−2,46	0,85
4	9,91	−2,09	0,85
5	10,23	−1,77	0,85

J'utilise un tableur. Dans la colonne D, je vois que la suite (v_n) est géométrique.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions de ces élèves en mettant en évidence l'aide que vous pourriez leur apporter.

2 – Présentez une correction de la question 2 de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale ES.

3 – Proposez deux ou trois *problèmes conduisant à l'étude de suites* à des niveaux de classes différents. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

Thème : probabilités

L'exercice

Le centre d'approvisionnement d'une chaîne de magasins spécialisée dans le jardinage et l'animalerie vient de recevoir une importante livraison de sable noir et blanc pour la décoration des fonds d'aquarium, de la part d'un nouveau fournisseur.
Ce sable d'une granulométrie importante est déjà conditionné en sacs d'environ 3 litres.
À l'issue d'une série de tests, deux types de défauts sont apparus, notés respectivement **c** et **j**.
Le défaut **c** consiste en la présence d'agrégats calcaires.
Le défaut **j** consiste en la présence de « grains » de sable jaune.

On dit qu'un sac est défectueux s'il présente au moins un des deux défauts **c** ou **j**.

On prélève un sac au hasard dans cette livraison.
On note C, l'événement « le sac présente le défaut **c** » et J l'événement « le sac présente le défaut **j** ».
On suppose que ces deux événements sont indépendants.
Les tests préalables ont permis d'établir que $2\,\%$ des sacs présentent le défaut **c** et que $3\,\%$ des sacs présentent le défaut **j**.

1 – Donner la valeur des probabilités de chacun des deux événements C et J.

2 – On note E l'événement « le sac présente les deux défauts **c** et **j** ». Calculer $P(E)$.

3 – Sachant que le sac choisi au hasard est défectueux, calculer la probabilité qu'il présente les deux défauts.

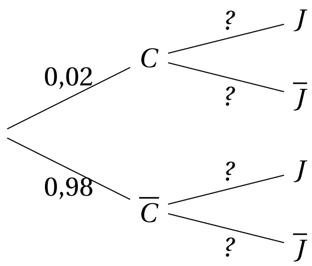
Les réponses de deux élèves aux deux premières questions

Élève 1

1. $P(C) = 0{,}02$ *et* $P(J) = 0{,}03$
2. $P(E) = P(C \cap J) = 0{,}02 \times 0{,}03 = 0{,}000\,6$

Élève 2

1. $P(C) = 0{,}02$ *et* $P(J) = 0{,}03$
2. On dresse un arbre pondéré.
Il me manque des valeurs.
Je ne sais pas comment calculer $P(E) = P(C \cap J)$.



Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs.

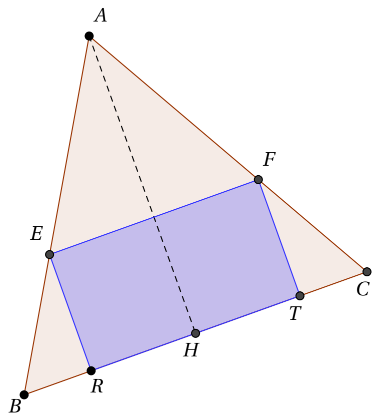
2 – Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale S.

3 – Proposez trois exercices sur le thème *probabilités*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

Thème : problèmes d'optimisation

L'exercice

On considère un rectangle inscrit dans un triangle équilatéral de côté 18 cm comme représenté sur la figure ci-contre. On souhaite que ce rectangle ait la plus grande aire possible.
On désigne par H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
Où faut-il placer le point R pour que l'aire du rectangle $REFT$ soit maximale ?



Les réponses de trois élèves de seconde

Élève 1

Je pose $x = RH$.
D'après le théorème de Thalès dans le triangle HBA : $\dfrac{BR}{BH} = \dfrac{ER}{AH}$ *donc* $\dfrac{9-x}{9} = \dfrac{ER}{h}$.
Le calcul de h donne : $h = \sqrt{18^2 - 9^2} = \sqrt{243} = 9\sqrt{3}$. *On obtient* $ER = 9\sqrt{3} \times \dfrac{9-x}{9} = \sqrt{3}(9-x)$.
L'aire est : $A = \sqrt{3} \times 2x(9-x)$.
En affichant à la calculatrice la fonction $f(x) = x(9-x) \times 2\sqrt{3}$, *j'obtiens en lisant dans la table des valeurs un maximum en* $x = 4$ *et* $x = 5$.

Élève 2

À l'aide d'un logiciel, j'ai construit la figure. Je cherche ensuite la plus grande aire possible.
En déplaçant le point R *sur le côté du triangle, j'obtiens* $BR = 4{,}48$ *environ pou un maximum de l'aire.*
Il nous faut donc placer le point R *à* $4{,}48$ *du point* B.

Élève 3

J'ai calculé l'aire du rectangle pour $BR = 1$ *cm :* $h = 18\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ *et* $BH = 9$ *cm.*
Dans le triangle ABH : $\dfrac{BR}{BH} = \dfrac{ER}{h}$. *Donc* $\dfrac{1}{9} = \dfrac{ER}{9\sqrt{3}}$ *d'où* $ER = \sqrt{3}$ *et* $A = \ell \times L = 2 \times 8 \times \sqrt{3} \approx 27{,}7$ cm^2.
De même, pour $BR = 2$ *cm,* $A = 2 \times 7 \times 2\sqrt{3} \approx 48{,}5$ cm^2 *; pour* $BR = 3$ *cm,* $A \approx 62{,}4$ cm^2.
Pour $BR = 4$ *cm et pour* $BR = 5$ *cm, je trouve* $69{,}28$ cm^2 *puis cela diminue.*
Le maximum est donc obtenu pour une valeur de BR *entre* 4 *cm et* 5 *cm.*

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la démarche de chaque élève en mettant en évidence leurs compétences en termes de conjecture et de démonstration.

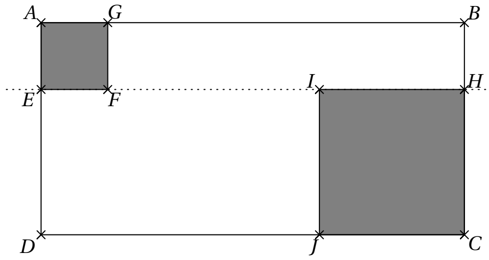
2- Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3- Proposez deux *problèmes d'optimisation*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous souhaitez développer chez les élèves.

Thème : problèmes conduisant à l'étude d'un polynôme du second degré

L'exercice

Sur une parcelle rectangulaire $ABCD$ de 4 mètres par 8 mètres, on veut délimiter deux parterres de fleurs carrés, dans deux coins opposés (AEFG et CHIJ, sur le schéma ci-contre) et avec E, F, I et H alignés.



Comment faut-il construire ces deux carrés pour que l'aire de la zone restante soit maximale ?

Les réponses de deux élèves

Élève de seconde

On note x la longueur AE. L'aire restante est égale à $f(x) = 32 - x^2 - (4-x)^2$.
À l'aide de la calculatrice, j'observe que $f(1) = f(3) = 22$. La fonction f atteint donc son maximum quand $x = 2$.

Élève de première

On note x la longueur AE. L'aire restante est égale à $f(x) = -2x^2 + 8x + 16$.
$f'(x) = -4x + 8$
On étudie le signe de $f'(x)$ et on en déduit les variations de f.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	24	$\nearrow$	

La fonction f n'admet donc pas un maximum mais un minimum. Il n'y a pas de valeur maximale de l'aire, mais elle est minimale quand $x = 2$.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence ses réussites et ses erreurs éventuelles.

2 – Présentez la correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe dont vous préciserez le niveau. Vous mettrez en évidence ce que peut apporter l'utilisation d'outils logiciels.

3 – Proposez deux ou trois *problèmes conduisant à l'étude d'un polynôme du second degré*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.