CAPES de mathématiques
Option Mathématiques–Session 2018

Le sujet comporte cinq parties.

Notations

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.
Pour m et n deux entiers naturels, $[\![m;n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leqslant k \leqslant n$.
$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs.
$\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels.
$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
On note e le nombre $\exp(1)$, image de 1 par la fonction exponentielle.
On rappelle que, pour tout nombre réel x, il existe un unique entier relatif $E(x)$ tel que $E(x) \leqslant x < E(x)+1$. Cet entier $E(x)$ est appelé *partie entière de* x.

Partie A : suites adjacentes

Étant donné deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on rappelle qu'elle sont dites *adjacentes* si l'une des deux est croissante, l'autre décroissante et si $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$.

I. On suppose dans cette question que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

1. Montrer que la suite $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et en déduire que pour tout entier naturel n, $a_n \leqslant b_n$.

Comme $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $(-b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et donc $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, somme de suites croissantes, est croissante. Comme la limite de cette suite est 0, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n - b_n \leqslant 0$, donc $a_n \leqslant b_n$.

2. Justifier que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes vers une même limite ℓ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leqslant \ell \leqslant b_n.$$

Comme $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, pour tout $n \geqslant 0$, $a_n \leqslant b_n \leqslant b_0$: la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. De même, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par a_0, donc converge vers une limite $\ell' \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n - b_n = \ell - \ell' = 0,$$

donc $\ell = \ell'$. Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant \ell$. Comme $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell \leqslant b_n$.

3. On suppose de plus les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement monotones. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n < \ell < b_n.$$

Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n < a_{n+1} \leqslant \ell \leqslant b_{n+1} < b_n$, donc $a_n < \ell < b_n$.

II. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $a_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$ et $b_n = a_n + \dfrac{1}{n \times n!}$.

1. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{(n+1)!} > 0, \\ b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} \\ &= \frac{1}{n(n+1)(n+1)!}(n(n+1) + n - (n+1)^2) \\ &= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0, \\ \lim_{n\to+\infty} a_n - b_n &= \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{nn!} = 0. \end{aligned}$$

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont donc adjacentes.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\mathrm{e} - a_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \mathrm{d}t$.
Indication : on pourra procéder par récurrence.

Pour $n = 1$, en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-t)\mathrm{e}^t \mathrm{d}t &= [(1-t)\mathrm{e}^t]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^t \mathrm{d}t \\ &= -1 + [\mathrm{e}^t]_0^1 \\ &= \mathrm{e} - 2 \\ &= \mathrm{e} - a_1. \end{aligned}$$

Supposons le résultat vrai au rang n pour un certain $n \geqslant 1$. En intégrant par parties :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-t)^{n+1}\mathrm{e}^t \mathrm{d}t &= \frac{1}{(n+1)!}[(1-t)^{n+1}\mathrm{e}^t]_0^1 + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e} \mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} + \mathrm{e} - a_n \\ &= \mathrm{e} - a_{n+1}. \end{aligned}$$

Par le principe de récurrence, le résultat est vrai pour tout $n \geqslant 1$.

3. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $0 < \mathrm{e} - a_n < \frac{1}{n \times n!}$.
En déduire la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Indication : on pourra étudier les variations de la fonction $t \mapsto (1-t)e^t$.

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(t) = (1-t)\mathrm{e}^t$. Cette fonction est dérivable et pour tout $t \in [0,1]$:

$$f'(t) = -\mathrm{e}^t + (1-t)\mathrm{e}^t = -t\mathrm{e}^t \leqslant 0.$$

De plus, f' ne s'annule qu'en 0. Donc f décroît strictement. Par suite, pour tout $t \in]0,1]$, $f(t) < f(0) = 1$. On obtient alors que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} 0 < \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \mathrm{d}t &= \int_0^1 (1-t)^{n-1}(1-t)\mathrm{e}^t \mathrm{d}t \\ &< \int_0^1 (1-t)^{n-1} \mathrm{d}t = \left[-\frac{(1-t)^n}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

D'après II.2, on obtient $0 < \mathrm{e} - a_n < \dfrac{1}{nn!}$ donc $a_n < \mathrm{e} < b_n$. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant adjacentes, en notant ℓ leur limite commune, on obtient $\ell \leqslant \mathrm{e} \leqslant e$, donc $\ell = \mathrm{e}$.

4. En déduire une valeur de n telle que a_n soit une valeur approchée de e à 10^{-5} près.

D'après I.2, il suffit de choisir n tel que $\dfrac{1}{nn!} < 10^{-5}$, ou de façon équivalente, $nn! > 10^5$. À l'aide d'une calculatrice, on obtient $n = 7$.

5. On suppose que e est un nombre rationnel.

a. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul q tel que le nombre $\mathrm{e}\, q!$ soit un entier naturel.

Posons $\mathrm{e} = \dfrac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. Alors $q!\mathrm{e} = p(q-1)! \in \mathbb{N}^*$.

b. Montrer que $x = q!\left(\mathrm{e} - \displaystyle\sum_{p=0}^{q} \frac{1}{p!}\right)$ est un entier naturel.

$$x = q!\mathrm{e} - \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} \in \mathbb{Z}.$$

De plus, d'après la question II.3, $\mathrm{e} - a_q > 0$, donc $x \in \mathbb{N}^*$.

c. Montrer que $0 < x < 1$.

Il reste à montrer que $x < 1$. D'après II.3, $x < \frac{q!}{qq!} = \frac{1}{q} \leqslant 1$.

d. Conclure.

x est donc un entier dans l'intervalle $]0, 1[$: c'est impossible. En conséquence, e n'est pas un nombre rationnel.

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle ouvert I contenant 0. On rappelle que f est dite *développable en série entière* au voisinage de 0 s'il existe un nombre réel $R > 0$ et une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres réels tels que $]-R, R[$ est inclus dans I et :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

III. 1. Démontrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est développable en série entière au voisinage de 0. Préciser son développement et donner le rayon de convergence de cette série entière.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, différent de -1, si $n \geqslant 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1+x}.$$

Si $x \in]-1, 1[$:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}.$$

Le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est donc $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$, pour $x \in]-1,1[$. Comme cette série converge sur $]-1,1[$, son rayon de convergence est $\geqslant 1$. Pour $x=1$, cette série diverge grossièrement, donc $R \leqslant 1$. D'où $R=1$.

2. Justifier que, pour tout nombre réel x dans l'intervalle $]-1,1[$,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

On énoncera avec soin le théorème utilisé.

Comme $|x|$ est strictement inférieur au rayon de convergence de la série entière $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^k$, cette série converge normalement, donc uniformément sur $[-x,x]$. On utilise le théorème suivant : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions intégrables sur un intervalle $[a,b]$, convergeant uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f, alors f est intégrable sur $[a,b]$ et :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Ici, en appliquant ce théorème sur $[0,x]$ si $x \geqslant 0$ ou sur $[x,0]$ si $x \leqslant 0$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

3. Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \dfrac{x^{k+1}}{k+1}$.

Démontrer que les deux suites $(S_{2n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Soit $n \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} S_{n+1}(x) - S_{n-1}(x) &= (-1)^{n+1}\frac{x^{n+2}}{n+2} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+2)(n+1)}((n+1)(1-x)+1). \end{aligned}$$

Comme $0 \leqslant x \leqslant 1$, ceci est du signe de $(-1)^n$, donc positif si n est pair et négatif si n est impair. Donc $(S_{2n+1}(x))_{n\geqslant 0}$ est croissante et $(S_{2n}(x))_{n\geqslant 0}$ est décroissante. De plus :

$$|S_{2n+1}(x) - S_{2n}(x)| = \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \leqslant \frac{1}{2n+2},$$

donc la différence de ces deux suites tend vers 0. Elle sont donc adjacentes.

4. En déduire que, pour tout entier naturel n et tout nombre réel x dans l'intervalle $[0,1[$,

$$S_{2n+1}(x) \leqslant \ln(1+x) \leqslant S_{2n}(x).$$

La limite commune de ces deux suites est $\ln(1+x)$ d'après III.2. D'après I.2, pour tout $x \in [0,1[$,

$$S_{2n+1}(x) \leqslant \ln(1+x) \leqslant S_{2n}(x).$$

5. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$S_{2n+1}(1) \leqslant \ln(2) \leqslant S_{2n}(1).$$

Par continuité de S_{2n} et de S_{2n+1} en 1 (ce sont des polynômes) et de la fonction ln en 2, en passant à la limite quand x tend vers 1 :

$$S_{2n+1}(1) \leqslant \ln(2) \leqslant S_{2n}(1).$$

6. Démontrer que $\ln(2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Les suites $(S_{2n}(1))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1}(1))_{n\geqslant 1}$ étant adjacentes, on note ℓ leur limite commune. D'après III.5, $\ell \leqslant \ln(2) \leqslant \ell$, donc $\ell = \ln(2)$. Les deux sous-suites extraites $(S_{2n}(1))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1}(1))_{n\geqslant 1}$ de la suite $(S_n(1))_{n\geqslant 1}$ converge toutes deux vers $\ln(2)$, donc $(S_n(1))_{n\geqslant 1}$ aussi. Autrement dit :

$$\ln(2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Partie B : écriture d'un entier en base deux

Le but de cette partie est de démontrer que tout entier naturel N supérieur ou égal à 2 s'écrit de manière unique

$$N = \sum_{k=0}^{n-1} d_k 2^k \quad \text{avec} \quad n \geqslant 2 \text{ et } \begin{cases} \forall k \in [\![0\ ;\ n-2]\!], \quad d_k \in \{0,1\}, \\ d_{n-1} = 1. \end{cases}$$

L'égalité précédente se note $N = \overline{d_{n-1}d_{n-2}\ldots d_0}$ (écriture de N en base deux) ; la suite finie $(d_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ s'appelle la suite des chiffres dans l'écriture de N en base deux.

Dans toute cette partie, N désigne un entier naturel supérieur ou égal 2.

IV. On suppose que $N = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} d_k 2^k$ avec $\forall k \in [\![0\ ;\ n-2]\!]$ $d_k \in \{0,1\}$ et $d_{n-1} = 1$.

1. Montrer que $2^{n-1} \leqslant N \leqslant 2^n - 1$.

On obtient :

$$0 + \ldots + 0 + 2^{n-1} \leqslant N \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = \frac{2^n - 1}{2-1} = 2^n - 1.$$

2. Montrer que d_0 est le reste de la division euclidienne de N par 2.

$$N = d_0 + 2 \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n-1} d_k 2^{k-1} \right)}_{=M}.$$

Comme $d_0 \in \{0, 1\}$ et $M \in \mathbb{N}$, cette égalité est la division euclidienne de N par 2. En particulier, d_0 est le reste de cette division euclidienne.

3. Démontrer que la suite $(d_0, \ldots, d_{n-1})$ est déterminée de manière unique.

D'après la question IV.1, la suite $(2^n)_{n \geqslant 0}$ étant strictement croissante, n est le plus petit entier naturel tel que $N \geqslant 2^{n-1}$, donc est unique. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on pose $P_i : (d_0, \ldots, d_i)$ sont uniques. Montrons P_i par récurrence sur i. D'après IV.2, d_0 est unique, par unicité du reste de la division euclidienne par 2. Donc P_0 est vraie. Supposons P_i vraie, avec $i < n$. On considère alors

$$N_i = \sum_{k=i+1}^{n-1} d_k 2^{k-i-1} = \frac{1}{2^{i+1}} \left(N - \sum_{k=0}^{i} d_k 2^k \right).$$

D'après IV.2, d_{i+1} est le reste de la division euclidienne de N_i par 2, donc est unique lui aussi. En conséquence, P_n est vraie et donc $(d_0, \ldots, d_n)$ est unique.

V. On définit deux suites d'entiers $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par $y_0 = N$ et pour tout entier naturel k, y_{k+1} et d_k désignent respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de y_k par 2.

1. On fixe $k \in \mathbb{N}^*$. Exprimer N en fonction de k, $d_0, \ldots, d_{k-1}$ et y_k.

Montrons par récurrence sur k que $N = \sum_{i=0}^{k-1} d_i 2^i + 2^k y_k$ pour $k \geqslant 1$. Pour $k = 1$, $N = y_0 = 2y_1 + d_0$ par définition de y_0, y_1 et d_0. Supposons le résultat vrai au rang k, avec $k \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} N &= \sum_{i=0}^{k-1} d_i 2^i + 2^k y_k \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} d_i 2^i + 2^k (d_k + 2y_{k+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{k} d_i 2^i + 2^{k+1} y_{k+1}. \end{aligned}$$

Par suite, le résultat est vrai pour tout k.

2. Démontrer que la suite $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang et qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $\overline{d_{n-1} d_{n-2} \ldots d_0}$ soit l'écriture de N en base deux.

Pour tout $k \geqslant 0$, $y_k = 2y_{k+1} + d_k$, donc $0 \leqslant y_{k+1} \leqslant \frac{y_k}{2}$. Par une récurrence simple, on obtient que pour tout k, $0 \leqslant y_k \leqslant \dfrac{y_0}{2^k}$, donc la suite $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Comme c'est une suite d'entiers, elle stationne à 0. Soit n le plus petit entier tel que y_n soit nul. Comme $y_{n-1} \neq 0$, nécessairement $d_{n-1} = 1$ car $y_{n-1} = 2y_n + d_{n-1} = d_{n-1} \neq 0$. D'après V.1, $N = \sum_{k=0}^{n-1} d_k 2^k$.

3. Écrire un algorithme qui, pour tout entier naturel N supérieur ou égal 2 donné, renvoie la suite $(d_0, d_1, \dots, d_{n-1})$ des chiffres de son écriture en base deux.

```
D ← ∅ (suite vide)
y ← N
Tant que (y ≠ 0) faire
  | d ← reste de la division euclidienne de y par 2
  | y ← quotient de la division euclidienne de y par 2
  | D ← concaténation de D et de (d)
Fin Tant que
Retourner(D)
```

4. Écrire en base deux le nombre qui s'écrit 391 en base dix.

En appliquant l'algorithme précédent, on obtient $391 = \overline{110000111}$.

VI. On se propose à présent de calculer le nombre N qui s'écrit $\overline{d_{n-1}d_{n-2}\dots d_0}$ en base deux.

1. Première méthode : méthode « naïve ».
On écrit $N = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} d_k 2^k$. Combien d'opérations (additions et multiplications) doit-on effectuer a priori pour calculer N avec cette méthode ?

On effectue au plus $n-1$ additions (selon le nombre de d_k non nuls) et $1 + 2 + \ldots + n - 2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ multiplications pour calculer les puissances de 2.

2. Deuxième méthode : méthode de Hörner.
On écrit $N = ((((d_{n-1} \times 2 + d_{n-2}) \times 2 + d_{n-3}) \times 2 + \ldots) \times 2 + d_0$. Combien d'opérations (additions et multiplications) doit-on effectuer a priori pour calculer N avec cette méthode ?

On effectue $n-1$ multiplications par 2 et $n-1$ additions.

3. Écrire un algorithme qui, pour toute suite de chiffres $(d_0, \dots, d_{n-1})$ donnée, renvoie la valeur de N calculée à l'aide de cette deuxième méthode.

```
N ← d_{n-1}
Pour i de 2 à n faire
  | N ← 2N + d_{n-i}
Fin Pour
Rendre N
```

4. Quel est le nombre dont l'écriture en base deux est $\overline{101001000100001}$?

En appliquant la méthode de Hörner, on obtient 21025.

Partie C : nombres dyadiques

L'ensemble $D_2 = \left\{ \frac{a}{2^p} \; ; a \in \mathbb{Z}, \; p \in \mathbb{N} \right\}$ est appelé ensemble des nombres dyadiques. On note D_2^+ l'ensemble des nombres dyadiques positifs ou nuls.

VII. Montrer que $\mathbb{Z}$ est strictement inclus dans D_2 et que D_2 est strictement inclus dans $\mathbb{Q}$. *Indication :* on pourra montrer que $\frac{1}{3} \notin D_2$.

Si $k \in \mathbb{Z}$, $k = \frac{k}{2^0} \in D_2$, donc $\mathbb{Z} \subseteq D_2$. Comme $\frac{1}{2} \in D_2$, $\mathbb{Z} \subsetneq D_2$. Si $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$, $\frac{a}{2^p} \in \mathbb{Q}$, donc $D_2 \subseteq \mathbb{Q}$. Supposons que $\frac{1}{3} \in D_2$. Alors il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{3} = \frac{a}{2^p}$ et donc $3a = 2^p$: 3 divise 2^p. Nécessairement, $p \geqslant 1$ et, par le lemme de Gauss, 3 divise 2 : c'est absurde. Donc $\frac{1}{3} \notin D_2$ et $D_2 \subsetneq \mathbb{Q}$.

VIII. Soit $x \in D_2^+ \backslash \mathbb{N}$. On se propose de démontrer qu'il existe un unique entier $n \geqslant 1$ et une unique suite $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ avec $a_0 \in \mathbb{N}$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n$ tels que

$$x = \sum_{k=0}^{n} a_k 2^{-k}, \quad \text{avec } a_n \neq 0.$$

Le membre de droite de cette égalité s'appelle le développement dyadique de x.

1. On suppose qu'une telle suite existe. Montrer que $a_0 = E(x)$ puis montrer que la suite $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ est déterminée de manière unique.

$$0 \leqslant x - a_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k 2^{-k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1.$$

Donc $x - a_0 \in [0, 1[$. Par suite, $a_0 = E(x)$ car a_0 est un entier tel que $a_0 \leqslant x < 1 + a_0$. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, soit P_i : $a_0, \ldots, a_i$ sont uniques. Montrons P_i pour tout i par récurrence sur i. Pour $i = 0$, $a_0 = E(x)$ est unique. Supposons P_i, avec $i < n$. Alors :

$$\underbrace{2^{i+1}\left(x - \sum_{k=0}^{i} a_k 2^{-k}\right)}_{=x_i} = a_{i+1} + \sum_{k=i+1}^{n} a_k 2^{i-k}.$$

D'après le calcul qui précède, a_{i+1} est la partie entière de x_i, donc est unique. Par suite, P_n est vraie et donc $(a_0, \ldots, a_n)$ est unique.

2. On souhaite à présent montrer l'existence d'une telle suite. À l'aide de la partie précédente, montrer l'existence d'un entier a_0, d'un entier $p \geqslant 1$ et d'une suite de nombres entiers $d_0, \ldots, d_{p-1}$ égaux à 0 ou 1, non tous nuls, tels que

$$x = a_0 + \sum_{k=0}^{p-1} d_k 2^{k-p}.$$

Posons $x = \frac{a}{2^p}$, avec $a \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. Comme $x \notin \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$. D'après la partie B (avec également le cas $a = 1$ obtenu avec $n = 1$ et $d_0 = 1$), il existe $m \geqslant 1$ et $d_0, \ldots, d_{n-1} \in \{0, 1\}$, avec $d_{n-1} = 1$ tels que

$$a = \sum_{k=0}^{m-1} d_k 2^k.$$

En conséquence :

$$x = \sum_{k=0}^{m-1} d_k 2^{k-p} = \underbrace{\sum_{k=p}^{m-1} d_k 2^{k-p}}_{=a_0 \in \mathbb{N}} + \sum_{k=0}^{p-1} d_k 2^{k-p}.$$

Si $d_0 = \ldots = d_{p-1} = 0$, alors $x = a_0 \in \mathbb{N}$, ce qui est exclu. L'un au moins des entiers $d_0, \ldots, d_{p-1}$ est non nul.

3. Conclure.

Soit n le plus grand entier inférieur ou égal à $p-1$ tel que $d_n = 1$: cela existe d'après la question précédente. On pose $a_l = d_{p-l}$ pour $l \in [\![1, p]\!]$. Alors :

$$x = a_0 + \sum_{l=1}^{n} a_l 2^{-l},$$

et $a_n = 1$.

IX. Donner le développement dyadique de $\dfrac{35}{4}$.

Avec l'algorithme donné en V.3, on obtient $35 = \overline{100011} = 2^0 + 2^1 + 2^5$. Donc :

$$\frac{35}{4} = 2^{-2} + 2^{-1} + 2^3.$$

Donc $n = 2$, $a_0 = 8$, $a_1 = a_2 = 1$.

Partie D : développement dyadique illimité

On appelle suite dyadique toute suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ où pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, a_k est un élément de $\{0, 1\}$. De plus :

— une suite dyadique $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est dite impropre s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \geqslant m$, $a_k = 1$;

— une suite dyadique $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est dite propre si elle n'est pas impropre.

X. On suppose que $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite dyadique.

1. Démontrer que la série de terme général $a_k 2^{-k}$ est convergente. On note sa somme $s(a) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k 2^{-k}$.

Pour tout k, $|a_k 2^{-k}| \leqslant 2^{-k}$. Comme la série de terme général 2^{-k} converge, la série de terme général $a_k 2^{-k}$ converge.

2. Soit N un entier naturel. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=N}^{+\infty} 2^{-k}$?

$$\sum_{k=N}^{+\infty} 2^{-k} = 2^{-N} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = \frac{2^{-N}}{1 - \frac{1}{2}} = 2^{-N+1}.$$

3. Vérifier que $s(a) \in [0,1]$.

Pour tout k, $0 \leqslant a_k \leqslant 2^{-k}$, donc :

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} a_k 2^{-k} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-1+1} = 1.$$

4. Montrer que si a est une suite dyadique propre, alors $s(a) \in [0,1[$.

Comme $a = (a_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite dyadique propre, il existe $k_0 \geqslant 1$ tel que $a_{k_0} = 0$. On pose $b_k = a_k$ si $k \neq k_0$ et $b_{k_0} = 1$. Alors $(b_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite dyadique et d'après la question précédente :

$$s(a) = s(b) - \frac{1}{2^{k_0}} \leqslant 1 - \frac{1}{2^{k_0}} < 1.$$

5. Montrer que si a est une suite dyadique impropre, alors $s(a)$ est un nombre dyadique.

Soit $N \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $a_n = 1$. Alors :

$$\begin{aligned} s(a) &= \sum_{k=1}^{N-1} a_k 2^{-k} + \sum_{k=N}^{\infty} 2^{-k} \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} a_k 2^{-k} + \frac{1}{2^{N-1}} \\ &= \frac{1}{2^{N-1}} \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} a_k 2^{N-1-k} + 1}_{\in \mathbb{N}} \right). \end{aligned}$$

Donc $s(a) \in D_2$.

6. Soit $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$a_k = \begin{cases} 0 \text{ si } k \text{ est impair,} \\ 1 \text{ si } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

Montrer que $s(a) = \dfrac{1}{3}$.

$$s(a) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-2k} = \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k} = \frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

XI. Soit x un nombre dyadique compris dans l'intervalle $[0,1[$.

1. En utilisant les résultats de la partie C, montrer qu'il existe une suite dyadique propre a telle que

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 2^{-k}.$$

Si $x = 0$, on choisit tous les a_k égal à 0. Sinon, x n'est pas entier. D'après la partie C, il existe $n \geqslant 1$, $a_0 \in \mathbb{N}$, $(a_1, \ldots, a_n)$ suite d'éléments de $\{0, 1\}$, avec $a_n = 1$, tels que

$$x = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k 2^{-k}.$$

D'après VIII.1, $a_0 = E(x) = 0$. On pose alors $a_k = 0$ si $k > n$. La suite dyadique $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est propre $x = s(a)$.

2. Montrer que si x est non nul, alors il existe également une suite dyadique impropre b telle que

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k 2^{-k}.$$

Si $x \neq 0$, $n \geqslant 1$ et $a_n = 1$. En utilisant X.2 :

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k 2^{-k} = \sum_{k=1}^{n-1} + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{n-1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k}.$$

On pose alors :

$$b_k = \begin{cases} a_k \text{ si } k < n, \\ 0 \text{ si } k = n, \\ 1 \text{ si } k > n. \end{cases}$$

La suite dyadique $(b_k)_{k\geqslant 1}$ est impropre et $s(b) = x$.

XII. Dans cette question, on considère un nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0, 1[$. On lui associe la suite $\alpha(x) = (\alpha_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ par l'égalité $\alpha_k(x) = E(2^k x) - 2E(2^{k-1}x)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) 2^{-k}$ et $v_n(x) = u_n(x) + 2^{-n}$.

1. Démontrer que la suite $(\alpha_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite dyadique.

Soit $k \geqslant 1$.

$$E(2^{k-1}x) \leqslant 2^{k-1}x < E(2^{k-1}x) + 1,$$

donc

$$2E(2^{k-1}x) \leqslant 2^k x < 2E(2^{k-1}x) + 2.$$

Par suite $E(2^k x)$ est un entier appartenant à $[2E(2^{k-1}x), 2E(2^{k-1}x)+2[$, donc vaut $2E(2^{k-1}x)$ ou $2E(2^{k-1}x) + 1$. En conséquence, $\alpha_k(x) = 0$ ou 1. La suite $(\alpha_k(x))_{k\geqslant 1}$ est dyadique.

2. Démontrer que les deux suites $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et prennent leurs valeurs dans $D_2 \cap [0, 1]$.

D'après X.3 :

$$u_n(x) = s((\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x), 0, 0, \ldots)) \in [0, 1],$$
$$v_n(x) = s((\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x), 1, 1, \ldots)) \in [0, 1].$$

De plus :

$$u_n(x) = \frac{1}{2^n}\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) 2^{n-k}}_{\in \mathbb{N}}\right) \in D_2,$$

$$v_n(x) = \frac{1}{2^n}\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) 2^{n-k} + 1}_{\in \mathbb{N}}\right) \in D_2.$$

La suite $(u_n(x))_{n\geqslant 1}$ est évidemment croissante. Si $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} v_{n+1}(x) - v_n(x) &= \alpha_{n+1}(x)2^{-n-1} + 2^{-n-1} - 2^{-n} \\ &= \alpha_{n+1}(x)2^{-n-1} - 2^{-n-1} \\ &= 2^{-n-1}(\alpha_{n+1}(x) - 1) \leqslant 0. \end{aligned}$$

Donc $(v_n(x))_{n\geqslant 1}$ décroît. Pour tout n, $v_n(x) - u_n(x) = 2^{-n}$, donc la suite $(v_n(x) - u_n(x))_{n\geqslant 0}$ tend vers 0.

3. Vérifier que $E(2^n x) = 2^n u_n(x)$ et en déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_n(x) \leqslant x < v_n(x).$$

Par récurrence sur n. Si $n = 1$:

$$2u_n(x) = \alpha_1(x) = E(2x) - 2E(x) = E(2x).$$

C'est donc vrai au rang 1. Supposons le résultat vrai au rang $n-1$, avec $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned} E(2^n x) &= \alpha_n(x) + 2E(2^{n-1}x) = \alpha_n(x) + 2^n u_{n-1}(x) \\ &= 2^n(u_{n-1}(x) + 2^{-n}\alpha_n(x)) \\ &= 2^n u_n(x). \end{aligned}$$

par suite, pour tout $n \geqslant 1$, $E(2^n x) = 2^n u_n(x)$, ce qui implique :

$$\begin{aligned} 2^n u_n(x) \leqslant 2^n x < 2^n u_n(x) + 1, \\ u_n(x) \leqslant x < v_n(x). \end{aligned}$$

4. Quelle est la limite commune des suites $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$?

On note ℓ cette limite commune. D'après la question précédente, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, $\ell \leqslant x \leqslant \ell$, donc $\ell = x$.

5. Montrer que $(\alpha_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite dyadique propre et que

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(x) 2^{-k}.$$

D'après la question précédente, $x = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(x)2^{-k}$. Si la suite $(\alpha_k(x))_{k\geqslant 1}$ est impropre, alors d'après X.5, $x \in D_2$. Posons $x = \frac{a}{2^k}$, avec $a, k \in \mathbb{N}$. Si $n \geqslant k$, $E(2^n x) = 2^{n-k}a$ et donc, si $n > k$, $\alpha_n(x) = 2^{n-k}a - 2.2^{n-1-k}a = 0$. La suite $(\alpha_k(x))_{k \geqslant 1}$ stationne à 0, donc est propre : c'est une contradiction. Donc la suite $(\alpha_k(x))_{k \geqslant 1}$ est propre.

6. En déduire que pour tout nombre réel x dans l'intervalle $[0, 1[$, il existe une unique suite dyadique propre $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que :

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 2^{-k}.$$

Soit $x \in [0, 1[$. D'après la question précédente, il existe une suite dyadique propre a telle que $s(a) = x$. Montrons maintenant que cette suite dyadique est unique. Soit a une suite dyadique propre telle que $s(a) = x$. Pour tout $n \geqslant 1$:

$$2^n x = \sum_{k=1}^{n} a_k 2^{n-k} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k 2^{n-k}}_{=y}.$$

Comme la suite a est propre, la suite dyadique $b = (a_{n+k})_{k \geqslant 1}$ également. D'après X.4, $y = s(b) \in [0, 1[$. On obtient donc que :

$$E(2^n x) = \sum_{k=1}^{n} a_k 2^{n-k}.$$

On en déduit que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\alpha_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k 2^{n-k} - 2 \sum_{k=1}^{n-1} a_k 2^{n-1-k} = a_n.$$

La suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ est donc unique.

On note alors

$$x = \overline{0, a_1 a_2 a_3 \ldots}$$

Cette nouvelle représentation de x est appelée la *représentation dyadique propre* de x. Si la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est nulle à partir d'un certain rang, on dit que la représentation dyadique de x est finie.

7. Si $d = (d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite dyadique propre, on note $x = s(d)$ et $d' = (d_{n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$. Justifier que $d_1 = E(2x)$ et $s(d') = 2x - d_1$.

D'après X.4,

$$2x = d_1 + \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} d_k 2^{-k+1}}_{\in [0,1[}.$$

Donc $E(2x) = d_1$.

$$\begin{aligned} s(d') &= \sum_{k=1}^{\infty} d_{k+1} 2^{-k} \\ &= 2\sum_{k=2}^{\infty} d_k 2^{-k} \\ &= 2\sum_{k=1}^{\infty} d_k 2^{-k} - d_1 \\ &= 2s(d) - d_1 \\ &= 2x - d_1. \end{aligned}$$

En déduire un algorithme qui prend en entrées un nombre réel $x \in [0,1[$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et qui renvoie la liste des n premiers chiffres du développement dyadique propre de x. On admettra l'existence d'une fonction *floor* qui renvoie la partie entière de son argument.

$D \leftarrow \varnothing$
Pour i **de** 1 **à** n **faire**
  $d \leftarrow floor(2x)$
  $x \leftarrow 2x - d$
  $D \leftarrow$ concaténation de $[d]$ et de D
Fin Pour
Rendre D

XIII. Démontrer que $D_2 \cap [0,1]$ est dense dans $[0,1]$. En déduire que D_2 est dense dans $\mathbb{R}$.

D'après XII.6, pour tout $x \in [0,1[$, il existe une suite de nombres dyadiques convergeant vers x. Comme $1 \in D_2$, $D_2 \cap [0,1]$ est dense dans $[0,1]$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$. On pose $y = x - E(x)$. D'après ce qui précède, il existe $y' \in D_2$ tel que $|y - y'| < \varepsilon$. On pose $x' = E(x) + y'$. Alors $x' \in D_2$ et $|x - x'| = |y - y'| < \varepsilon$. Donc D_2 est dense dans $\mathbb{R}$.

XIV. Démontrer que $\mathbb{R} \backslash D_2$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Indication : on pourra utiliser la question VII.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$. D'après la question précédente, il existe $y \in D_2$ tel que $\left|x - \frac{1}{3} - y\right| < \varepsilon$. Comme $\frac{1}{3} \notin D_2$, $\frac{1}{3} + y \notin D_2$. Donc $\mathbb{R} \backslash D_2$ est dense dans $\mathbb{R}$.

XV. Soit x un nombre réel dans l'intervalle $\in [0,1[$ dont un développement dyadique, propre ou impropre, est $\overline{0, a_1 a_2 a_3 \ldots}$

1. Quel est le développement dyadique de $1 - x$?

Pour tout $n \geqslant 1$, posons $b_n = 1 - a_n$. La suite $(b_n)_{n \geqslant 1}$ est dyadique. De plus :

$$s(a) + s(b) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1,$$

donc $s(b) = 1 - x$: b est un développement dyadique de $1 - x$.

2. On suppose que $2x \in [0, 1[$. Quel est le développement dyadique de $2x$? Plus généralement, quel est le développement dyadique de $2^l x$, lorsque l est un entier relatif et que $2^l x \in [0, 1[$?

Dans le premier cas $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$, donc $a_1 = 0$. Le développement dyadique de $2x$ est $\overline{0, a_2 a_3 \dots}$. Si $2^l x \in [0, 1[$, alors $x \in \left[0, \frac{1}{2^l}\right[$, donc $a_1 = \dots = a_l = 0$. Le développement dyadique de $2^l x$ est $\overline{0, a_{l+1} a_{l+2} \dots}$.

3. Donner le développement dyadique de $\dfrac{2}{3}$.

D'après X.6 et la question précédente le développement dyadique de $\frac{2}{3}$ est $\overline{0, b_1 b_2 \dots}$ avec :

$$b_n = \begin{cases} 0 \text{ si } k \text{ est pair,} \\ 1 \text{ si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Partie E : suite extraite de la suite $(\cos(n\pi\theta))_{n\in\mathbb{N}}$

XVI. Dans cette question, θ désigne un nombre réel strictement positif. On pose

$$c_n = \cos(n\pi\theta), \qquad s_n = \sin(n\pi\theta).$$

1. Vérifier que pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} c_{n+1} + c_{n-1} &= 2c_n \cos(\pi\theta), \\ c_{n+1} - c_{n-1} &= -2s_n \sin(\pi\theta), \\ c_n^2 + s_n^2 &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \cos(n\pi\theta)\cos(\pi\theta) - \sin(n\pi\theta)\sin(\pi\theta), \\ c_{n-1} &= \cos(n\pi\theta)\cos(\pi\theta) + \sin(n\pi\theta)\sin(\pi\theta). \end{aligned}$$

Donc $c_{n+1} + c_{n-1} = 2c_n \cos(\pi\theta)$ et $c_{n+1} - c_{n-1} = -2s_n \sin(\pi\theta)$. De plus :

$$c_n^2 + s_n^2 = \cos^2(n\pi\theta) + \sin^2(n\pi\theta) = 1.$$

2. En déduire que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si θ est un entier relatif pair.
Indication : on pourra raisonner par disjonction de cas, suivant la valeur de $\cos(\pi\theta)$.

Supposons que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ en montrons que θ est un entier pair. On raisonne par disjonction de cas. Si θ n'est pas un entier relatif, alors $\sin(\pi\theta) \neq 0$. On en déduit que :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} s_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{c_{n-1} - c_{n+1}}{2\sin(\pi\theta)} = \frac{\ell - \ell}{2\sin(\pi\theta)} = 0.$$

Comme $c_n^2 + s_n^2 = 1$ pour tout n, $\ell^2 + 0 = 1$, donc $\ell = 1$ ou -1. De plus :

$$2\ell = \lim_{n\longrightarrow+\infty} c_{n+1} + c_{n-1} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} 2c_n \cos(\pi\theta) = 2\ell\cos(\pi\theta),$$

donc $\cos(\pi\theta) = 1$ et θ est un entier pair : c'est une contradiction. Si θ est un entier impair, alors $c_n = (-1)^n$ pour tout n, donc la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge : c'est une contradiction. En conclusion, si $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, θ est un entier pair. Réciproquement, si θ est un entier pair, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stationne à 1.

XVII. On s'intéresse à présent à la suite $(c_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = c_{2^n} = \cos(2^n \pi\theta).$$

1. On suppose (dans cette question uniquement) que θ est un nombre dyadique. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Posons $\theta = \frac{a}{2^p}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$. Si $n > p$, $u_n = \cos(2^{n-p}a\pi) = 1$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stationne à 1 à partir d'un certain rang.

2. On suppose (dans cette question uniquement) qu'il existe un nombre dyadique x tel que $\theta = x + \dfrac{1}{3}$. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Posons $\theta = \frac{a}{2^p} + \frac{1}{3}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$. Pour $n > p$,

$$u_n = \cos\left(\frac{2^n}{3}\pi + 2^{n-p}a\pi\right) = -\frac{1}{2}.$$

La suite stationne à $-\frac{1}{2}$ à partir d'un certain rang.

3. On suppose (dans cette question uniquement) qu'il existe un nombre dyadique x tel que $\theta = x + \dfrac{2}{3}$. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Par un raisonnement semblable on montre que la suite stationne à $-\frac{1}{2}$ à partir d'un certain rang.

4. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n^2 - 1$.

$$u_{n+1} = \cos(2.2^n\pi\theta) = 2\cos^2(2^n\pi\theta) - 1 = 2u_n^2 - 1.$$

5. Lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, quelles sont les seules valeurs possibles pour le réel ℓ ?

D'après la question précédente, $\ell = 2\ell^2 - 1$, donc $2\ell^2 - \ell - 1 = 0$. On en déduit que $\ell = 1$ ou $\ell = -\frac{1}{2}$.

6. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définissant le développement dyadique propre de $\theta - E(\theta)$. Montrer que, quel que soit l'entier naturel n, il existe un entier relatif k_n et un réel ε_n appartenant à l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ tels que :

$$2^n\theta = 2k_n + a_n + \frac{a_{n+1}}{2} + \varepsilon_n.$$

$$\begin{aligned} 2^n\theta &= \sum_{k=1}^{n-1} a_k 2^{n-k} + 2^n E(\theta) + a_n + \frac{a_{n+1}}{2} + \sum_{k=n+2}^{\infty} a_k 2^{n-k} \\ &= 2\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} a_k 2^{n-k-1}}_{=k_n\in\mathbb{Z}} + 2^n E(\theta) + a_n + \frac{a_{n+1}}{2} + \underbrace{\sum_{k=n+2}^{\infty} a_k 2^{n-k}}_{=\varepsilon_n}. \end{aligned}$$

De plus,

$$0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{2}.$$

7. Démontrer que :
— si $a_n = a_{n+1}$, alors $u_n \geqslant 0$;
— si $a_n \neq a_{n+1}$, alors $u_n \leqslant 0$.
Puis que :
— si $u_n > 0$, alors $a_n = a_{n+1}$;
— si $u_n < 0$, alors $a_n \neq a_{n+1}$.

$$u_n = \cos\left(2k_n\pi + a_n\pi + \frac{a_{n+1}}{2}\pi + \varepsilon_n\pi\right) = \cos\left(a_n\pi + \frac{a_{n+1}}{2}\pi + \varepsilon_n\pi\right).$$

— Si $a_n = a_{n+1} = 0$, alors $\left(a_n + \frac{a_{n+1}}{2} + \varepsilon_n\right)\pi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $u_n \geqslant 0$.
— Si $a_n = a_{n+1} = 1$, alors $\left(a_n + \frac{a_{n+1}}{2} + \varepsilon_n\right)\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ donc $u_n \geqslant 0$.
— Si $a_n = 0$ et $a_{n+1} = 1$, alors $\left(a_n + \frac{a_{n+1}}{2} + \varepsilon_n\right)\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ donc $u_n \leqslant 0$.
— Si $a_n = 1$ et $a_{n+1} = 0$, alors $\left(a_n + \frac{a_{n+1}}{2} + \varepsilon_n\right)\pi \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ donc $u_n \leqslant 0$.
Ceci prouve les deux premiers points, par disjonction de cas. On obtient les deux autres points par contraposée.

8. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre réel $\ell > 0$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $a_n = 0$. En déduire que θ est un nombre dyadique.

Si $\ell > 0$, à partir d'un certain rang N, $u_n > 0$. D'après la question XVII.7, si $n \geqslant N$, $a_{n+1} = a_n$: la suite dyadique stationne. Comme elle est propre, $a_n = 0$ si $n > N$. Le développement dyadique de θ est fini, donc $\theta \in D_2$.

9. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre réel $\ell < 0$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $a_{n+1} \neq a_n$. En déduire que $\theta - \dfrac{1}{3}$ ou $\theta - \dfrac{2}{3}$ est un nombre dyadique.

Si $\ell < 0$, à partir d'un certain rang N, $u_n < 0$. D'après la question XVII.7, si $n \geqslant N$, $a_{n+1} \neq a_n$. Il y a deux possibilités : si $n \geqslant N$,

$$a_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est pair,} \\ 0 \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases} \qquad \text{ou } a_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est impair,} \\ 0 \text{ si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Dans le premier cas, d'après X.6, en posant $\frac{1}{3} = \overline{0, b_1 b_2 \ldots}$, alors $a_n = b_n$ si $n \geqslant N$. Donc :

$$\begin{aligned} \theta - \frac{1}{3} &= E(\theta) + \sum_{k=1}^{N} (a_k - b_k) 2^{-k} \\ &= \frac{1}{2^N}\left(2^N E(\theta) + \sum_{k=1}^{N} (a_k - b_k) 2^{N-k}\right) \in D_2. \end{aligned}$$

Dans le second cas, en utilisant XV.3, on montre de la même façon que $\theta - \frac{2}{3} \in D_2$.

XVIII. Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On justifiera ce résultat et on précisera le cas échéant la valeur de sa limite.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $\theta \in D_2$, ou $\theta - \frac{1}{3} \in D_2$ ou $\theta - \frac{2}{3} \in D_2$.

$\Longrightarrow$. D'après XVII.5, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $\ell = 1$ ou $\ell = -\frac{1}{2}$. Si $\ell = 1$, d'après XVII. 8, $\theta \in D_2$. Si $\ell = -\frac{1}{2}$, d'après XVII.9, $\theta - \frac{1}{3} \in D_2$ ou $\theta - \frac{2}{3} \in D_2$.

$\Longleftarrow$. Si $\theta \in D_2$, d'après XVII.1, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -1. Si $\theta - \frac{1}{3} \in D_2$ ou $\theta - \frac{2}{3} \in D_2$, d'après XVII.2 et XVII.3, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-\frac{1}{2}$.